Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Aufgabe 2 (6 Punkte):
Aufgabe 3 (10 Punkte):
Aufgabe 4 (3 Punkte):
Aufgabe 5 (3 Punkte):
Aufgabe 6 (4 Punkte):
Aufgabe 7 (3 Punkte):
Aufgabe 8 (4 Punkte):
Aufgabe 9 (8 Punkte):
Aufgabe 10 (4 Punkte):

Gesamtpunkte (50 Punkte):

PRÜFUNG
103.006 VO Lineare Algebra für TPH

24. Februar 2022

- Es sind keine Unterlagen erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge und Begründungen vollständig, sauber und übersichtlich! Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Die Ausarbeitungen sind abzugeben und werden für die Bewertung herangezogen, sofern es sich um Rechenaufgaben handelt oder Begründungen verlangt werden. Wird nach einer Begründung gefragt, so ist diese durch blauen Text gekennzeichnet. Ansonsten wird die getätigte Eingabe in MÖBIUS bewertet.
- Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle schriftlichen Ausarbeitungen müssen am Ende der Prüfung digitalisiert (PDF-File) und im TUWEL-Kurs der VO hochgeladen werden.
- Die Ergebnisse und der Termin der Einsichtnahme werden im TUWEL-Kurs der Vorlesung bekannt gegeben und abgewickelt.

Aufgabe 1 (5 Punkte). Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U \subset V$.

(a) Welche der folgenden Axiome müssen erfüllt sein, damit U einen Unterraum bildet?

- $s \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{u} \in U:\ \ s \cdot \boldsymbol{u} \in U$
- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U:\ \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U:\ \ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \in U$
- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U:\ \ \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \in U$

Sei W gegeben durch $W = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : 4x - 2y + 4z = 0\}$.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von W.

(c) Wählen Sie eine Basis B von W aus.

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$
- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

(d) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$ gilt.

(e) Geben Sie den Koordinatenvektor $[\boldsymbol{v}]_B$ von $\boldsymbol{v}$ aus (d) bezüglich der Basis B aus (c) an.

Aufgabe 2 (6 Punkte). Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ durch

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha - 2 & 2\alpha + 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -\alpha^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie alle $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}$, für die das lineare Gleichungssystem lösbar ist.

(b) Berechnen Sie für $\alpha = 1$ die allgemeine Lösung des Gleichungssystem.

(c) Berechnen Sie den Rang von A und eine nichttriviale (d.h. $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$) Lösung $\boldsymbol{v}$ des homogenen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix A für $\alpha = -2$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Gegeben ist die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$ seien mit kanonischen Basen E_2 und E_4 ausgestattet. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix A dargestellt als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Weiters sind für $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$ die Basen C und B gegeben durch

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{E_2 \leftarrow C}$ des Basiswechsels von C zu E_2 sowie die Transformationsmatrix $T_{B \leftarrow E_4}$ des Basiswechsels von E_4 zu B.

(b) Fertigen Sie eine Skizze des Abbildungsdiagramms an und berechnen Sie die Matrix $A' = [\varphi(C)]_B$ von φ bezüglich der Basen C und B.

(c) Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{v} = (1, -1)^T = [v]_{E_2}$. Berechnen Sie $\varphi(\boldsymbol{v})$ auf zwei verschiedene Arten, unter Benutzung von A und A'.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist für $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A ohne diese Matrix explizit auszurechnen.

(b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass A singulär wird und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (3 Punkte). Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

(a) Wählen Sie die definierenden Eigenschaften einer Norm

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

aus:

- $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
- $\|s\boldsymbol{x}\| = |s|\|\boldsymbol{x}\|, \ s \in \mathbb{R}$
- $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$
- $\|\boldsymbol{x}\| = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$
- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| > \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$
- $\|s\boldsymbol{x}\| = s^2\|\boldsymbol{x}\|, \ s \in \mathbb{R}$

(b) Betrachten Sie die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2.$$

Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit Gleichheit gilt?

- $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ linear unabhängig
- $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq 0$

Aufgabe 6 (4 Punkte). Gegeben sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt und ein Unterraum $U = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ mit $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{u} \in U$ so, dass die Norm $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|_2$ für den Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ minimal wird.

(b) Berechnen Sie den Wert dieser Norm.

Aufgabe 7 (3 Punkte). Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

hat den Eigenwert $\lambda = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 2. Für $\lambda = -1$ betrachte man die Matrix

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels elementarer Zeilenumformungen erhält man aus $A - \lambda I$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis des Eigenraums $E(\lambda)$ zu $\lambda = -1$ sowie dessen Dimension.

(b) Bestimmen Sie mit den Informationen aus (a) einen Eigenvektor $\boldsymbol{v}$ zum Eigenwert $\lambda = -1$.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Verbinden Sie in der folgenden Aufzählung Eigenschaften auf der linken Seite durch einen Implikationspfeil ($\Leftarrow$ oder $\Rightarrow$) mit der (den) jeweils passenden Eigenschaft(en) auf der rechten Seite, um insgesamt vier wahre Aussagen zu erhalten (*zusätzlich* zu beispielsweise 2. $\Longrightarrow$ 7.):

1. A ist orthogonal	5. $\det(A) \geq 0$.
2. A ist symmetrisch	6. Für alle Eigenwerte gilt $\lvert\lambda\rvert = 1$
3. A ist singulär	7. Für alle Eigenwerte gilt $\lambda \in \mathbb{R}$
4. A ist regulär	8. Es gibt eine orthonormale Eigenbasis

Aufgabe 9 (8 Punkte). Betrachten Sie ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem der Form

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\,\boldsymbol{y}(t) = 0,$$

mit einer konstanten, diagonalisierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Die Fundamentalmatrix $Y(t)$ ist regulär.
- Die Lösung ist durch eine konstante Fundamentalmatrix geben.
- $Y = 0$ ist die einzige Lösung.
- $\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t)$ kann in ein entkoppeltes System $\boldsymbol{z} = D\boldsymbol{z}$ mit Diagonalmatrix D übergeführt werden.

(b) Betrachten Sie ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem der Form

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$$

wobei $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2, \ldots, f_n)^T$ eine vektorwertige Funktion mit $f_i \in C([a,b])$ ist.

Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Der Ansatz $\boldsymbol{y}(t) = Y(t)\boldsymbol{c}(t)$ kann zum Auffinden einer partikulären Lösung herangezogen werden.
- Mit $A = XDX^{-1}$ ist $\boldsymbol{y}(t) = Y(t)D\boldsymbol{c}(t)$ eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.
- Sind $\boldsymbol{y}_{p_1}$ und $\boldsymbol{y}_{p_2}$ zwei verschiedene partikuläre Lösungen der gegebenen Differentialgleichung, so gilt: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_{p_1} - \boldsymbol{y}_{p_2}$ ist eine Lösung von $\boldsymbol{y}' - A\boldsymbol{y} = 0$.
- $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{c}(t)$ ist der Ansatz zum Auffinden einer partikulären Lösung.

Aufgabe 10 (4 Punkte). Betrachten Sie das System von Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1' &= \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2, \\ \boldsymbol{y}_2' &= \boldsymbol{y}_2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix dieses Systems.