Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Aufgabe 2 (4 Punkte):
Aufgabe 3 (4 Punkte):
Aufgabe 4 (2 Punkte):
Aufgabe 5 (3 Punkte):
Aufgabe 6 (3 Punkte):
Aufgabe 7 (4 Punkte):
Aufgabe 8 (8 Punkte):
Aufgabe 9 (7 Punkte):
Aufgabe 10 (4 Punkte):
Aufgabe 11 (6 Punkte):

Gesamtpunkte (50 Punkte):

PRÜFUNG
103.006 VO Lineare Algebra für TPH

29. Juni 2022

- Es sind keine Unterlagen erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und dokumentieren Sie die Rechengänge und Begründungen vollständig, sauber und übersichtlich! Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Die Ausarbeitungen sind abzugeben und werden für die Bewertung herangezogen, sofern es sich um Rechenaufgaben handelt oder Begründungen verlangt werden. Wird nach einer Begründung gefragt, so ist diese durch blauen Text gekennzeichnet. Ansonsten wird die getätigte Eingabe in MÖBIUS bewertet.
- Alle Zettel müssen mit Name und Matrikelnummer beschriftet werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle schriftlichen Ausarbeitungen müssen am Ende der Prüfung digitalisiert (PDF-File) und im TUWEL-Kurs der VO hochgeladen werden.
- Die Ergebnisse und der Termin der Einsichtnahme werden im TUWEL-Kurs der Vorlesung bekannt gegeben und abgewickelt.

Aufgabe 1 (5 Punkte). Sei $V = \mathbb{R}^3$ und U gegeben durch

$$U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 2\,x + 5\,y + 4\,z = 0\} \subset V$$

(a) Welche der folgenden Axiome müssen erfüllt sein, damit U einen Unterraum von V bildet?

- $s \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{u} \in U:\ \ s \cdot \boldsymbol{u} \in U$
- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U:\ \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U:\ \ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \in U$
- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U:\ \ \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \in U$

(b) Wählen Sie eine Basis B von U aus und begründen Sie dies.

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-5}{4} \end{pmatrix} \right\}$
- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

(c) Bestimmen Sie die Dimension von U.

(d) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in U$ gilt.

(e) Geben Sie den Koordinatenvektor $[\boldsymbol{v}]_B$ von $\boldsymbol{v}$ aus (d) bezüglich der Basis B aus (c) an.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ in der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr|c} -2 & 2 & 5 & -8 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \beta \\ -1 & -1 & 2 & -3 & \gamma \end{array}\right),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Elementare Zeilenumformungen führen auf das System

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & \boldsymbol{b}' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr|c} -1 & 1 & 2 & -3 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - \beta - 2\gamma \end{array}\right).$$

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben und begründen Sie Ihre Antworten in Ihren Aufzeichnungen.

(a) Wenn $\boldsymbol{x}$ eine Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist, gilt dann auch $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$? Falls ja, gilt auch die Umkehrung?

(b) Was ist der Rang von A? Was ist der Rang von A'?

(c) Was ist der Rang von $\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$? Was ist der Rang von $\left(\begin{array}{c|c} A' & \boldsymbol{b}' \end{array}\right)$? Begründen Sie Ihre Antwort in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$!

(d) Was ist die Dimension des Kerns von A? Was ist die Dimension des Kerns von A'?

(e) Ist die Lösung von $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ gegebenenfalls eindeutig?

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis E_3. Eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$ mit

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{E_3 \leftarrow C}$ des Basiswechsels von C zu E_3 sowie die Transformationsmatrix $T_{C \leftarrow E_3}$ des Basiswechsels von E_3 zu C.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Die Vektorräume $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ seien mit den kanonischen Basen E_3 und E_2 ausgestattet. Die Abbildung φ ist bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix A gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiters sind für $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ die Basen $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ und $C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix $\Phi = [\varphi(B)]_C$ bezüglich der Basen B und C.

Aufgabe 5 (3 Punkte). Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist für $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A ohne diese Matrix explizit auszurechnen.

(b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass A singulär wird und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (3 Punkte). Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$.

(a) Wählen Sie die definierenden Eigenschaften eines allgemeinen Skalarprodukts

$$\langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

aus:

- $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \rangle$
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$
- $\langle s\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = s^2 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \ s \in \mathbb{R}$
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$
- $\langle s\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = s \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle, \ s \in \mathbb{R}$
- $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}$

(b) Betrachten Sie den Satz von Pythagoras

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Wählen Sie die richtige Voraussetzung für diesen Satz aus:

- $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \neq 0$
- $\boldsymbol{x} \parallel \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq 0$

Aufgabe 7 (4 Punkte). Gegeben sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt und ein Unterraum $U = \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ mit $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{u} \in U$ so, dass die Norm $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|_2$ für den Vektor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ minimal wird.

(b) Berechnen Sie den Wert dieser Norm.

Aufgabe 8 (8 Punkte). Gegeben ist eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 2$ einen zugehörigen Eigenvektor.

(b) Zeigen Sie, dass $p(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$ das charakteristische Polynom ist und berechnen Sie alle Eigenwerte.

(c) Begründen Sie, ob die Matrix A regulär oder singulär ist.

(d) Bestimmen Sie die Definitheit der Matrix A und begründen Sie diese.

(e) Berechnen Sie eine reguläre Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche die Matrix A diagonalisiert.

Aufgabe 9 (7 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent zu A ist eine *reguläre* Matrix. Begründen Sie Ihre Antworten in Ihren Aufzeichnungen.

- A besitzt Eigenwerte, die gleich Null sind. - **w/f**?
- Das Bild von A ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. - **w/f**?
- Der Kern von A enthält nur den Nullvektor. - **w/f**?
- Die Determinante von A ist gleich Null. - **w/f**?

(b) Sind die folgenden Eigenschaften einer *symmetrischen* Matrix A korrekt? Falls nicht, korrigieren Sie die Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- Alle Eigenwerte von A sind reell. - **w/f**?
- Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar. - **w/f**?
- Die Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind. - **w/f**?

Aufgabe 10 (4 Punkte). Betrachten Sie das System von Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2, \\ y_2' &= y_2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für $\boldsymbol{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top$ eine Fundamentalmatrix dieses Systems.

Aufgabe 11 (6 Punkte). Gegeben ist das lineare Anfangswertproblem 1. Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(t) - A\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat den Eigenwert $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2.

Die Eigenvektoren sind $\boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, mit dem zugehörigen Hauptvektor $\boldsymbol{h}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

und $\boldsymbol{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}_h(t)$ des homogenen Problems an.

(b) Geben Sie eine Partikulärlösung $\boldsymbol{y}_p(t)$ des inhomogenen Problems für $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an. Verwenden Sie den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Seien $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ die Lösungen aus (a) und (b).
Wie müssen Sie $\boldsymbol{y}_h(t)$ und $\boldsymbol{y}_p(t)$ kombinieren, um die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}'(t) + A\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{f}(t)$ des inhomogenen Problems zu erhalten? Von wie vielen freien Parametern hängt $\boldsymbol{y}(t)$ ab?

(d) Geben Sie eine Lösung $\boldsymbol{y}(t)$ des homogenen Anfangswertproblems für $\boldsymbol{f}(t) = 0$ und $\boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ an. Verwenden Sie Ihre Lösung aus (a) als Ansatz.