Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
SS 2012

A N A L Y S I S   I I   F Ü R   T P H,   V O (103.087)

Vorlesungsprüfung (FR, 29.06.2012)

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. keine schriftlichen Unterlagen. Arbeitszeit: 150 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*gesamt*
Punkte					

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Zur Beurteilung werden ausschließlich die in die entsprechenden Kästchen ***eingetragenen Antworten heranzgezogen.***

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein. *[A2EF568B]*

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boxed{f(x,y) = \ln \frac{1+x^2}{1+y^2}}$

a) Geben Sie *[a): 2 P.]*
- den Gradienten,
- die Hesse-Matrix, und
- das Taylorpolynom 2. Grades um die Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$ an.

b) Geben Sie alle stationären Punkte von f samt deren Typ an. *[b): 1 P.]*

c) Durch $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ sei irgendeine differenzierbare Koordinatentransformation definiert. Geben Sie eine Darstellung für den Gradienten von $\boxed{g(u,v) := f(x(u,v), y(u,v))}$ an. *[c): 2 P.]*

d) An welchen Stellen (x_0, y_0) ist die Linearisierung des Gradientenfeldes $\boxed{h(x,y) := \nabla f(x,y)}$ ein konstanter Vektor? *[d): 1 P.]*

- **Aufgabe 2.**

Die Physikerin Phyllis P. entwirft ein mathematisches Modell für eine Teilchenbahn. Sie nennt das Teilchen 'Phylion'. Dieses startet zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ im $\mathbb{R}^3$ und bewegt sich auf der Oberfläche der Einheitskugel weiter. Zwischen Ort $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ und Zeit $t \geq 0$ vermutet Phyllis einen Zusammenhang der Gestalt

$$\begin{aligned} x + y &= 1 + u\,t\,, \\ x + z &= 1 + v\,t\,, \end{aligned}$$

mit gewissen Geschwindigkeitsparametern u, v. Sie ist aber nicht ganz sicher und überlegt nun, ob eine derartige Teilchenbahn $(x(t), y(t), z(t))$ auf der Oberfläche der Einheitskugel überhaupt existieren kann, wenigstens über einen kurzen Zeitraum $[0, T]$ hinweg.

a) Beantworten Sie diese Frage und begründen Sie Ihre Antwort. Ist diese von den konkreten Werten der vorgegebenen Parameter u, v abhängig? (Begründung!) *[a): 3 P.]*

b) Falls die Antwort zu a) positiv ausfällt, berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $(x'(t), y'(t), z'(t))$ des Phylions zum Startzeitpunkt $t = 0$ mittels impliziter Differentiation. *[b): 3 P.]*

- **Aufgabe 3.**

a) Geben Sie den Wert des komplexen Kurvenintegrals an, *[a): 2 P.]*

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{z - z_1}{z - z_2} \, dz,$$

und zwar in Abhängigkeit von z_1 und z_2. Dabei ist C der Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes $B \subseteq \mathbb{C}$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, wobei $z_2 \notin C$.

b) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals *[b): 4 P.]*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x + x^2} \, dx$$

mit Hilfe einer Technik aus der komplexen Integrationsthoerie.

- **Aufgabe 4.**

Entscheiden und *begründen* Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen bzw. ob sie *wahr* (**w**) oder *falsch* (**f**) sind, bzw. wann sie zutreffen, oder wie eine Aussage ggf. zu modifizieren ist, damit sie zutrifft.

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \; = \; \tfrac{1}{2}\,(A\,x)\cdot x \,+\, b\cdot x \,+\, c$$

Dann haben alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ den gleichen Typ (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch). (**w/f ?**). Geben Sie auch die Hesse-Matrix von f an. *[a): 2.5 P.]*

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Das lineare Funktional $f : \; (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch *[b): 3.5 P.]*

$$f(x) := \tfrac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} i\,x(\tfrac{i}{n})$$

ist beschränkt. (**w/f ?**) Kommentieren Sie auch den Fall $n \to \infty$.

c) Betrachten Sie folgende Aussage:

Sei $f \in C[-\pi, \pi]$ gegeben. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n = n(\varepsilon)$ und ein 'trigonometrisches Polynom' $p_n(x)$ der Gestalt *[d): max. 3 Extra-P.]*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \, \sin(kx)\,,$$

so dass gilt $\|p_n - f\|_\infty < \varepsilon$.

Welche Bedingung muss die Funktion $f(x)$ erfüllen, damit die Wahrheit dieser Aussage gesichert ist?

- **Aufgabe 5.**

a) Wie lauten die notwendigen Bedingungen für ein lokales Extremum einer reellwertigen Funktion $f(x,y,z)$ entlang einer Kurve im $\mathbb{R}^3$, die durch den Schnitt zweier implizit durch $\varphi_1(x,y,z) = 0$ und $\varphi_2(x,y,z) = 0$ definierter Flächen gegeben ist? *[a): 1.5 P.]*

b) Wie lautet die Gestalt der trigonometrischen Fourierreihe einer 2π-periodischen Funktion $f(x)$? Geben Sie die Formeln für die Fourierkoeffizienten und die Parseval'sche Gleichung an. *[b): 1.5 P.]*

c) Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil von e^{iz}, und zwar einmal ausgehend von $z = x+iy$ und einmal ausgehend von $z = re^{i\varphi}$. *[c): 1.5 P.]*

d) Was versteht man unter einem Pol m-ter Ordnung einer komplexen Funktion $f(z)$? Geben eine Berechnungsformel für das Residuum von f an einer derartigen Polstelle an. *[d): 1.5 P.]*