Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

ANALYSIS II FÜR TPH, VO (103.087)

Vorlesungsprüfung (FR, 29.06.2012)

— *Keine elektronischen Hilfsmittel. keine schriftlichen Unterlagen. Arbeitszeit: 150 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	4.	5.	gesamt
Punkte					••••••• ••

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Zur Beurteilung werden ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\text{Kästchen}}$ ***eingetragenen Antworten heranzgezogen.***

Machen Sie sich zunächst Notizen,
und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein. *[A2EF568B]*

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\boxed{f(x,y) = x\,e^{x+y^2}}$

a) Geben Sie *[a): 2 P.]*
   - den Gradienten,
   - die Hesse-Matrix, und
   - das Taylorpolynom 2. Grades um die Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$ an.

b) Geben Sie alle stationären Punkte von f samt deren Typ an. *[b): 1 P.]*

c) Durch $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ sei irgendeine differenzierbare Koordinatentransformation definiert. Geben Sie eine Darstellung für den Gradienten von $\boxed{g(u,v) := f(x(u,v), y(u,v))}$ an. *[c): 2 P.]*

d) An welchen Stellen (x_0, y_0) ist die Linearisierung des Gradientenfeldes $\boxed{h(x,y) := \nabla f(x,y)}$ ein konstanter Vektor? *[d): 1 P.]*

- **Aufgabe 2.**

Der Physikstudent Philipp M. arbeitet im Rahmen seiner Bachelorarbeit an der mathematischen Beschreibung einer Teilchenbahn. Das Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ im $\mathbb{R}^3$ und lebt auf der Oberfläche des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$. Zwischen Position $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ und Zeit $t \geq 0$ vermutet Philipp einen Zusammenhang der Gestalt

$$\begin{aligned} x - v\,t &= 0\,, \\ y + z - v\,t &= 1\,, \end{aligned}$$

mit vorgegebenem Geschwindigkeitsparameter v. Er hegt jedoch leise Zweifel an seinen Überlegungen und fragt die Mathematikstudentin Mathilde P., ob eine derartige Teilchenbahn $(x(t), y(t), z(t))$ auf der Oberfläche des Zylinders überhaupt möglich ist, wenigstens über eine kurze Lebensdauer $[0, T]$ hinweg.

a) Welche Antwort gibt Mathilde? Ist diese Antwort von v abhängig? Falls sie positiv ausfällt − ist die Teilchenbahn durch Philipps Modell lokal eindeutig bestimmt? (Begründung!) *[a): 3 P.]*

b) Sofern die Antwort zu a) positiv ausfällt, nennt Philipp das Teilchen zu Ehren von Mathilde das ‘Mathphilion’. Berechnen Sie für diesen Fall den Geschwindigkeitsvektor $(x'(t), y'(t), z'(t))$ des Mathphilions zum Startzeitpunkt $t = 0$ mittels impliziter Differentiation. *[b): 3 P.]*

- **Aufgabe 3.**

a) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals *[a): 4 P.]*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 8\,x^2 + 16}$$

mit Hilfe einer Technik aus der komplexen Integrationsthoerie.

b) Geben Sie den Wert des komplexen Kurvenintegrals an, *[b): 2 P.]*

$$\oint_C \frac{\zeta^n}{(\zeta - z)}\, d\zeta,$$

und zwar in Abhängigkeit von z und n. Dabei ist C der Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes $B \subseteq \mathbb{C}$, $z \notin C$ ein fester Punkt, und $n \in \mathbb{N}$.

- **Aufgabe 4.**

Entscheiden und *begründen* Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen bzw. ob sie *wahr* (**w**) oder *falsch* (**f**) sind, bzw. wann sie zutreffen, oder wie eine Aussage ggf. zu modifizieren ist, damit sie zutrifft.

a) Gegeben sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, mit Jacobi-Matrix $J(x)$. An einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gelte: $(J(x_0)h) \cdot h \neq 0$ (inneres Produkt) für alle $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$. Dann ist f an x_0 lokal invertierbar. (**w/f ?**). [Hinweis: Wählen Sie spezielle h, um zu argumentieren.] *[a): 2.5 P.]*

b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Das lineare Funktional $f: (C[0,1], \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$, definiert durch *[b): 3.5 P.]*

$$f(x) := \int_0^1 \frac{x(t)}{t+\varepsilon}\, dt$$

ist stetig. (**w/f ?**) Kommentieren Sie auch den Fall $\varepsilon \to 0$.

c) Durch die trigonometrische Funktionenreihe *[d): max. 3 Extra-P.]*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cos(kx)$$

ist eine Funktion aus $L^2(-\pi, \pi)$ definiert. (**w/f ?**)

- **Aufgabe 5.**

a) Wie lautet die Kettenregel für die Komposition $f \circ g$ in folgenden beiden Fällen? Spezifizieren Sie die Dimensionen der dabei beteiligten Jacobi-Matrizen und welche Art von Produkt jeweils auszuwerten ist. *[a): 1.5 P.]*

(i) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und (ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

b) Welche definierenden Eigenschaften hat ein inneres Produkt in einem Hilbertraum über $\mathbb{R}$? Geben Sie auch die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung an. Wann tritt in dieser die Gleichheit auf? *[b): 1.5 P.]*

c) Stellen Sie die beiden Werte von $w = \sqrt{-i/2}$ als $w = x + iy$ und als $w = r\,e^{i\varphi}$ dar. *[c): 1.5 P.]*

d) Leiten Sie die Cauchy'sche Integralformel aus dem Residuensatz ab. *[d): 1.5 P.]*