Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2014/15

ANALYSIS II FÜR TPH, VO (103.087)

Vorlesungsprüfung (Fr, 30.01.2015)

— keine elektronischen Hilfsmittel. keine schriftlichen Unterlagen. Arbeitszeit: 150 min. —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	2.	3.	4.	5.	*gesamt*
Punkte					*max.* 30

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein

Zur Beurteilung werden ausschließlich die in die entsprechenden **Kästchen** ***eingetragenen Antworten herangezogen.***

Machen Sie sich zunächst Notizen, und tragen Sie dann Ihre Lösung samt Zusammenfassung der wesentlichen Aspekte des Lösungsweges **ein.**

- **Aufgabe 1.**

a) Durch die Gleichung $\boxed{x^4 + y^4 + z^4 = 1}$ ist eine geschlossene Fläche im $\mathbb{R}^3$ definiert. *[a): 1 P.]*

Geben Sie einen ***Normalvektor*** an die Fläche in einem beliebigen Punkt (x, y, z) auf der Fläche an.

b) Leiten Sie ein Gleichungssystem her, dessen Lösung diejenigen Punkte der auf unter **a)** definierten Fläche liefert, die vom Koordinatenursprung (0,0,0) ***maximalen Abstand*** haben. (Sie brauchen dieses Gleichungssystem nicht lösen.) *[b): 1.5 P.]*

c) Sei C die Kurve, die als Schnitt der Fläche aus **a)** mit der durch die Gleichung $\boxed{x = y^3}$ definierten Fläche entsteht. Geben Sie den ***Tangentialvektor an*** C in dem Kurvenpunkt $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ an.
Hinweis: nicht gleich ins Kasterl rechnen! *[c): 3.5 P.]*

- **Aufgabe 2.**

a) Bestimmen Sie die ***trigonometrische Fourierreihe*** der ungeraden 2π - periodischen Funktion $f(x)$ mit $f(x) = 1$ für $x \in (0, \pi)$. Schreiben Sie die Reihe in der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ldots$ an. *[a): 3 P.]*

Zusatzfrage: Wie sieht der punktweise Limes der Fourierreihe für $x \in [-\pi, \pi]$ aus?

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus **a)** den Wert der konvergenten Reihe $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^2}}$ *[b): 3 P.]*

- **Aufgabe 3.**

a) Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{1+4x^2(1+x^2)}\,dx}$ *[a): 5 P.]*

mittels einer Technik aus der komplexen Funktionentheorie.[1]

b) Bestimmen Sie den Wert des komplexen Kurvenintegrals $\boxed{\displaystyle\oint_{\Gamma} z^{-1} cosh\ z\ dz}$, wobei Γ eine geschlossene Kurve bezeichnet mit 0 im Inneren von Γ. *[b): 1 P.]*

[1]Schreiben Sie nicht alle Detailrechnungen ins Kasterl (dafür ist nicht genug Platz), sondern nur die wesentlichen Argumentation und die relevanten Zwischenergebnisse.

- **Aufgabe 4.**

a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist durch $g(x) = ||f(x)||_2^2$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld definiert. ***Geben Sie eine Formel für $\nabla g(x)$ an, und zwar in Abhängigkeit von der Jacobi-Matrix $J(x)$ von f.*** *[a): 1.5 P.]*

b) Bestimmen Sie die ***Hesse-Matrix*** des Skalarfeldes $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x \cdot (x + y)$ (euklidisches inneres Produkt). Dabei ist $y \in \mathbb{R}^n$ ein fest gewählter Vektor. *[b): 1 P.]*

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Was versteht man unter der ***Matrixnorm*** (Abbildungsnorm) von A? *[c): 1.5 P.]*

c) Sei $f(z)$ eine ganze (d.h. auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbare) komplexe Funktion. Weiters sei $C \subset \mathbb{C}$ eine glatte Kurve mit Parameterdarstellung $z(t), a \le t \le b$.

Geben Sie zwei Methoden zur Berechnung des komplexen Kurvenintegrals $\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$ an:

(i) durch Zurückführung auf zwei reelle Integrale $\int \ldots dt$,
(ii) mittels des Begriffes der Stammfunktion.

Erläutern Sie beides in mögliches präziser Weise. *[d): 2 P.]*

- **Aufgabe 5.** Beantworten Sie die folgenden Fragen möglichst Präzise.

a) Was versteht man unter der **Hesse-Matrix** eines Skalarfeldes $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?
Unter welchen Voraussetzungen ist diese symmetrische? *[a): 1.5 P.]*

b) Formulieren Sie den **Mittelwertsatz** für stetig differenzierbare Skalarfelder $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *[b): 1.5 P.]*

c) Sei H ein reeller Hilbertraum mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, und $u \in H$ ein festes Element von H.
Zeigen Sie: ***Durch*** $f(x) := \langle u, x \rangle$ ***ist ein stetiges lineares Funktional auf*** H ***definiert.*** *[c): 1.5 P.]*

d) Wie lauten die ***Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen*** und was ist ihre Bedeutung? *[d): 1.5 P.]*