S. Nagele, G. Schranz-Kirlinger
Institut für Analysis und Scientific Computing
TU Wien

UE ANALYSIS I FÜR TECHNISCHE PHYSIK (103.088)

Haupttest am 11. 1. 2008

Familienname	Vorname	Matrikelnummer

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf die erste Seite und benützen Sie nur die vorgesehenen Blätter für die Lösungen der Beispiele. Das Verwenden einen Taschenrechners ist nicht erlaubt.

Alles Gute und viel Erfolg!

Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3	Gesamt

1) (6 Punkte)

Gegeben seien die Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n + \frac{1}{n} + 2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(4n+3)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 - 2n + 3}{2n^2 - 1}$$

1. Untersuchen Sie die drei Reihen auf **Konvergenz**! (4P)
2. Falls eine Reihe konvergiert, geben Sie eine **untere** und **obere Schranke** für die Summe an! (1.5P)
3. Wie lautet der **Grenzwert** $\lim_{n\to\infty} b_n$ der **Folge** b_n? (0.5P)

Lösungen:

1. Es gilt:

$$a_n = \frac{4}{n + \frac{1}{n} + 2} \geq \frac{4}{n + 1 + 2} \geq \frac{4}{n + 3n} = \frac{1}{n}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ besitzt also die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und ist somit divergent.

Mit der Grenzwertform des Quotientenkriteriums erhält man für die zweite Reihe:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}(4n+7)} \frac{3^n(4n+3)}{2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \frac{4n+3}{4n+7} = \frac{2}{3} < 1$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist also absolut konvergent und daher konvergent. Für die dritte Reihe gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 2n + 3}{2n^2 - 1} = \infty$$

Da also schon die Folge der Reihenglieder divergiert, divergiert auch die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

2. Da alle Reihenglieder positiv sind, ist 0 eine untere Schranke für die Reihe:

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \text{ da } b_n > 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Eine obere Schranke erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(4n+3)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3$$

3. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, muss für den Grenzwert notwendigerweise gelten $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

2) (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = \ln(x^3 - x)$$

1. Bestimmen Sie den **maximalen Definitionsbereich** D der Funktion $f(x)$. (1P)
2. Bestimmen Sie das **Monotonieverhalten** von $f(x)$ für $x > 1$. (1P)
3. Existieren im Intervall $(1, 2)$ **Nullstellen** von $f(x)$? Falls ja, wieviele? Begründen Sie! (1.5P)
4. Für welche $x \in D$ nimmt $f(x)$ **Extremwerte** an? (1P)
5. Finden Sie jene **Stellen** $x \in D$, an denen die **Tangenten** an die Funktion $f(x)$ **parallel** zu jener in $x_0 = 2$ sind. Lassen Sie dabei Wurzeln **unausgewertet** in den Formeln stehen. (1.5P)

Lösung:

1. $x^3 - x > 0$

   Fallunterscheidung:
   x>0: $x^2 - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (1, \infty)$
   x<0: $x^2 - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1, 0)$
   $\Rightarrow f : (-1, 0) \cup (1, \infty) \to \mathbb{R}$

2. $f'(x) = \frac{3x^2-1}{x^3-x}$,
   für $x > 1$
   Nenner $3x^2 - 1 > 0$ und Zähler $x^3 - x > 0$
   $\Longrightarrow \quad f(x)$ **streng monoton wachsend** für $x > 1$.

3. Die Funktion $f(x) = \ln(x^3 - x)$ ist stetig und streng monoton wachsend für $x > 1$. Diese Funktion nimmt daher jeden Wert zwischen $\lim_{x\to 1_+} \ln(x^3 - x) = -\infty < 0$ und $\lim_{x\to 2_-} \ln(x^3 - x) = \ln(6) > 0$ **genau einmal** an (Satz 6.2.13 im VO Skriptum). Es gibt daher **eine Nullstelle** im Intervall $(1, 2)$.
4. $f'(x) = \frac{3x^2-1}{x^3-x}, \qquad 3x_E^2 - 1 = 0$
   $\Rightarrow \quad x_{E1} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

   $\Rightarrow \quad x_{E2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ liegt nicht im Definitionsbereich der Funktion $f(x)$.

5. $f'(x) = \frac{3x^2-1}{x^3-x}$, $\qquad f'(x_0) = \frac{11}{6} = f'(x_p)$

$$\Rightarrow \quad \frac{11}{6} = \frac{3x_p^2 - 1}{x_p^3 - x_p}$$

$$\frac{11}{6}x_p^3 - 3x_p^2 - \frac{11}{6}x_p + 1 = 0$$

Bekannte Nullstelle bei $x_0 = 2$ abdividieren:

$$\frac{11}{6}x_p^3 - 3x_p^2 - \frac{11}{6}x_p + 1 \quad : \quad (x_p - 2) \quad = \quad \frac{11}{6}x_p^2 - \frac{4}{6}x_p - \frac{1}{2}$$

$$x_{p\pm} = \frac{-4 \pm \sqrt{148}}{22}$$

$x_{p+} = \frac{-4+\sqrt{148}}{22}$ liegt **nicht** im Definitionsbereich.

$\Longrightarrow x_p = x_{p-} = \frac{-4-\sqrt{148}}{22}$

3) (6 Punkte)

1. Beweisen Sie mittels **vollständiger Induktion** $\forall n \in \mathbb{N}$ (2P)
$$1+4+9+\cdots+n^2 = \frac{n}{6}(2n^2+3n+1)$$
2. Zeigen Sie mittels **vollständiger Induktion** $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (2.5P)
$$(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_n) > 1+\sum_{i=1}^{n} b_i \qquad b_i > 0$$
3. Tritt in der Entwicklung von $(x+7y)^{92}$ nach **dem binomischen Lehrsatz** ein Term $x^{19}y^{63}$ mit einem entsprechenden Koeffizienten auf? Begründen Sie!
Berechnen Sie den Koeffizienten von x^2y^2 in $(a^2x+5by+3aby)^4$. (1.5P)

Lösung:

1. Induktionsanfang: $n=1$, $1=\frac{1}{6}(2+3+1)$

   Induktionsschluss: Es gelte
$$1+4+9+\cdots+n^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$
   Daher gilt
$$1+4+9+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}+(n+1)^2 =$$
$$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} = ... =$$
$$= \frac{(n+1)}{6}(2(n+1)^2+3(n+1)+1)$$
   Somit gilt die Formel für $(n+1)$ und die Behauptung ist bewiesen für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Induktionsanfang:
$$n=2, \qquad (1+b_1)(1+b_2) = 1+b_1+b_2+b_1b_2 > 1+\sum_{i=1}^{2} b_i$$
   Induktionsvoraussetzung:
$$\prod_{i=1}^{n}(1+b_i) > 1+\sum_{i=1}^{n} b_i$$

Induktionsschluss:

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+b_i) \overset{Ind.vor.}{>} \left(1+\sum_{i=1}^{n} b_i\right)(1+b_{n+1}) = 1+\sum_{i=1}^{n} b_i+b_{n+1}+\underbrace{b_{n+1}\sum_{i=1}^{n} b_i}_{>0} > 1+\sum_{i=1}^{n+1} b_i$$

Somit gilt die Formel für $(n+1)$ und die Behauptung ist bewiesen für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Der Term $x^{19}y^{63}$ tritt in der Entwicklung von $(x+7y)^{92}$ nicht auf, da die Summe der Exponenten $19+63=82 \neq 92$ ist.

$$(a^2x+5by+3aby)^4 = (a^2x+(5b+3ab)y)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}a^{2k}(5b+3ab)^{4-k}x^ky^{4-k}$$

Der Koeffizient von x^2y^2 ist bei dem Summanden, der $k=2$ entspricht, abzulesen. Der gesuchte Koeffizient ist daher:

$$\binom{4}{2}a^4(5b+3ab)^2$$