# 103.088 UE Analysis I für TPH    1. Zwischentest, 23.10.2007

1. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ (5P):

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

2. Beweisen oder widerlegen Sie (1P):

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(2n^2 - n + 5) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Lösungen:**

1. 
   - Induktionsanfang: $\sum_{i=0}^{1} i^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$
   - Induktionsschluß: Es gelte die Induktionsvoraussetzung $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
     Dann folgt aus $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + \quad (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$ $(n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2(n^2+4n+4)\frac{1}{4} = \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2$

2. Widerlegung durch Gegenbeispiel: Für n=2 ist die Behauptung nicht erfüllt:

$$\sum_{i=1}^{2} i^2 = 1 + 4 = 5 \neq \frac{2}{6}(2(2)^2 - 2 + 5)$$

1. Gegeben sei die unendliche Reihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2-2}}$$

   a) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz! (2.5P)

   b) Untersuchen Sie die Reihe auf absolute Konvergenz! (2P)

2. Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz: (1.5P)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n}+1}$$

## Lösungen:

1. a) Die Reihe lässt sich schreiben als

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2-2}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n c_n \quad \text{mit } c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}} > 0, \forall n \geq 2$$

Es handelt sich um eine *alternierende Reihe*. Für die Summanden $c_n$ gilt:

- Die Folge $c_n$ ist für $n \geq 2$ streng monoton fallend:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &< c_n \\ \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2-2}} &< \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}} \\ (n+1)^2 - 2 &> n^2 - 2 \qquad (\text{für } n \geq 2) \\ n^2 + 2n + 1 - 2 &> n^2 - 2 \\ 2n + 1 &> 0 \end{aligned}$$

  Die letzte Ungleichung ist für alle $n \geq 2$ eine wahre Aussage.

- Die Folge $c_n$ ist eine Nullfolge: (2 Möglichkeiten)

$$1.\ c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}} = \frac{\frac{1}{n^{3/2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^{3/2}}}} \to \frac{0}{\sqrt[3]{1-0}} = 0 \text{ für } n \to \infty$$

$$2.\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n > N : |c_n| < \varepsilon$$

Sei also $\varepsilon > 0$, dann gilt für $n \geq 2:$

$$\begin{aligned} |c_n| &< \varepsilon \\ \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}} &< \varepsilon \\ n^2 - 2 &> \frac{1}{\varepsilon^3} \\ n^2 &> \frac{1}{\varepsilon^3} + 2 \geq 0 \\ n &> \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^3} + 2} =: N(\varepsilon) \end{aligned}$$

Insgesamt wurde also gezeigt: Die Folge $c_n$ ist eine monoton gegen Null strebende Folge. Aus dem Konvergenzkriterium von Leibnitz folgt daher, dass die alternierende Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2-2}}$$

konvergiert.

b) Sei wieder $c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}}$. Es gilt die folgende Abschätzung

$$c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$. Daher ist laut Minorantenkriterium die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n c_n$ nicht absolut konvergent.

2. Die Reihe lässt sich wie folgt umformen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n}+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-1)$$

Man erkennt, dass die Summanden $b_n$ keine Nullfolge, sondern eine divergente Folge bilden. Daher kann diese Reihe nicht konverigeren.

# 103.088 UE Analysis I für TPH 3. Zwischentest, 4.12.2007

| | |
|---|---|
| Name | Matrikelnummer |

1. Ermitteln Sie die Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Funktion (4P):
$$f(x) = \frac{x^2 + 12x - 23}{x^3 - x^2 - 8x + 12}.$$

2. Schreiben Sie den Ansatz für die Partialbruchzerlegung folgender rationalen Funktion (2P):
$$g(x) = \frac{4x^6 + 12x^4 + 2x + 7}{(x^2 - 4x + 13)^3(2x^5 + 8x^4 + 10x^3)}.$$

*Verwenden Sie für Ihre Rechnungen bitte ausschließlich dieses Blatt! Die Verwendung eines Taschenrechners, einer Formelsammlung oder des Skriptums ist nicht erlaubt!*

## Lösung

(sehr ausführlich mit Zwischentexten)

1. Definieren wir zunächst die Polynome
$$\begin{aligned} P(x) &:= x^2 + 12x - 23 \\ Q(x) &:= x^3 - x^2 - 8x + 12 \end{aligned}$$

   Damit lässt sich die rationale Funktion $f(x)$ schreiben als $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Um die Partialbruchzerlegung von $f(x)$ zu bestimmen, sollte man zunächst den Nenner $Q(x)$ faktorisieren. Durch Ausprobieren [1] findet man z.B. die Nullstelle $x_1 = 2$. Division von $Q(x)$ durch den entsprechenden Linearfaktor $(x - 2)$ liefert das quadratische Polynom $x^2 + x - 6$, dessen beide Nullstellen nun z.B. mittels der Lösungsformel für quadratische Gleichungen bestimmt werden können. Man erhält damit folgende Faktorisierung von $Q(x)$ :
$$Q(x) = (x - 2)^2(x + 3)$$

   Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $f(x)$ lautet nun
$$f(x) = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{(x - 2)^2} + \frac{B}{x + 3}$$

   Bringt man die rechte Seite auf gemeinsamen Nenner, so erhält man für den Zähler
$$A_1(x-2)(x+3)+A_2(x+3)+B(x-2)^2 = x^2(A_1+B)+x(A_1+A_2-4B)+(-6A_1+3A_2+4B)$$

[1] Falls $Q(x)$ ganzzahlige Nullstellen hat, so muss jede solche Nullstelle ein Teiler vom Koeffizienten $a_0 = 12$ sein. Damit muss die Menge dieser Nullstellen eine Teilmenge von $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}$ sein.

Dieser Zähler muss gleich $P(x)$ sein. Koeffizientenvergleich mit $P(x)$ liefert für die Koeffizienten $A_1, A_2, B$ folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1 + B &= 1 \quad (1) \\ A_1 + A_2 - 4B &= 12 \quad (2) \\ -6A_1 + 3A_2 + 4B &= -23 \quad (3) \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung hat man $B = 1 - A_1$. Ersetzt man damit $B$ in den letzten beiden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} 5A_1 + A_2 &= 16 \quad (4) \\ -10A_1 + 3A_2 &= -27 \quad (5) \end{aligned}$$

Multipliziert man die Gleichung (4) mit 2 und addiert sie zur Gleichung (5), so erhält man

$$5A_2 = 5 \Leftrightarrow A_2 = 1$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Gleichung (4) ein, so kann man sie nach $A_1$ auflösen und erhält

$$A_1 = 3$$

Dies wiederum in (4) eingesetzt liefert schließlich

$$B = -2.$$

Damit lautet die Partialbruchzerlegung von $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{x^2 + 12x - 23}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \frac{3}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x+3}$$

2. Die Faktoren im Nenner von $g(x)$ haben folgende Faktorisierung:

$$x^2 - 4x + 13 = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) \qquad \text{(Irreduzibel über } \mathbb{R}\text{)},$$

$$(2x^5 + 8x^4 + 10x^3) = 2x^3 \underbrace{(x^2 + 4x + 5)}_{\text{Irreduzibel über } \mathbb{R}} = 2x^3(x + 2 - i)(x + 2 + i)$$

Damit lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $g(x)$

$$\begin{aligned} g(x) = {} & \frac{A_1 x + B_1}{x^2 - 4x + 13} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 - 4x + 13)^2} + \frac{A_3 x + B_3}{(x^2 - 4x + 13)^3} + \\ & + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} + \frac{D_1 x + E_1}{x^2 + 4x + 5} \end{aligned}$$

## 103.088 UE Analysis I für TPH 4. Zwischentest, 22.1.2008

| | |
|---|---|
| Name | Matrikelnummer |

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale: (2P|3P|1P)

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\ \mathrm{d}x \qquad \int x^3 \ln(x^2)\ \mathrm{d}x \qquad \int_{-a}^{a} e^{-x^2} x^2 \sin x\ \mathrm{d}x \quad a \in \mathbb{R}$$

*Verwenden Sie für Ihre Rechnungen bitte ausschließlich dieses Blatt! Die Verwendung eines Taschenrechners, einer Formelsammlung oder des Skriptums ist nicht erlaubt!*

**Lösungen:**

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx = \left| \begin{array}{ccc} y & = & \sin x \\ dy & = & \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(1-y^2)^2}{y^4} dy = \int \frac{1}{y^4} dy - 2\int \frac{1}{y^2} dy + \int 1 dy =$$

$$= -\frac{1}{3y^3} + \frac{2}{y} + y = \frac{3\sin^4 x + 6\sin^2 x - 1}{3\sin^3 x} + C$$

$$\int x^3 \ln(x^2) dx = 2\int x^3 \ln(x) dx = \left| \begin{array}{c} \int uv' = uv - \int u'v \\ u = \ln(x) \quad v' = x^3 \end{array} \right| =$$

$$= 2\frac{x^4}{4}\ln(x) - 2\int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{2}\ln(x) - \frac{x^4}{8} = \frac{x^4}{4}\ln(x^2) - \frac{x^4}{8} + C$$

$e^{-x^2} x^2 \sin x$ ist eine ungerade Funktion. Das Integral auf dem um Null symmetrisches Intervall ergibt daher Null.