Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

WS 2008/09

ANALYSIS I FÜR TPH

Haupttest (19. Dezember 2008)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

Aufgabe 1.

Eine Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}a_n - 1,$$

mit festem Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für Startwerte $a_0 > -2$ gilt: $a_n > -2 \; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für Startwerte $a_0 > -2$ die Folge streng monoton fallend ist.

c) Ist die Folge für alle Startwerte $a_0 > -2$ konvergent? (Begründung!)

Anmerkung: Sie können c) beantworten, ohne a), b) gelöst zu haben; man setze einfach die Aussagen a), b) als richtig voraus.

d) Dafür gibt es 2 Extra-Punkte:

Geben Sie den Grenzwert dieser konvergenten Folge an. (Präzise Begründung ist verlangt!)

LÖSUNG

a) Induktionsanfang: $n = 0$: $a_0 > -2$ laut Voraussetzung.

Induktionsschritt: $n \to n+1$: Zu zeigen ist $a_{n+1} > -2$. Es gilt

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}a_n - 1 > -2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}a_n > -1 \quad \Leftrightarrow \quad a_n > -2,$$

was laut Induktionsvoraussetzung gilt. Somit ist $a_{n+1} > -2$.

b) Induktionsanfang: $n = 1$: $a_1 = \tfrac{1}{2}a_0 - 1 < a_0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < a_0$, was laut Voraussetzung gilt.

Induktionsschritt: $n \to n+1$: Zu zeigen ist $a_{n+1} < a_n$. Es gilt nach Definition

$$a_{n+1} < a_n \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}a_n - 1 < \tfrac{1}{2}a_{n-1} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < a_{n-1},$$

was laut Induktionsvoraussetzung gilt. Somit ist $a_{n+1} < a_n$, also die Folge fällt streng monoton.

c) Nach a) und b) ist die Folge a_n ist für Startwerte $a_0 > -2$ nach unten beschränkt und monoton fallend, daher konvergent.

d) Für den Grenzwert a muss offenbar gelten $a = \tfrac{1}{2}a - 1$, also $a = -2$. Wie begründet man das präzise? Es muss gelten $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2}a_n - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}a_n \; - 1 = \tfrac{1}{2}\,a - 1 \;\Rightarrow\; a = -2$.

Oder so: Für die Folge $a_n + 2$ gilt

$$a_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}\,a_n - 1 + 2 = \frac{1}{2}\,a_n + 1 = \frac{1}{2}\,(a_n + 2).$$

$a_n + 2$ ist daher eine Nullfolge, und somit gilt $a_n \to -2$.

Aufgabe 2.

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2y)^{2n+1} .$$

a) Untersuchen Sie die Reihe auf absolute Konvergenz für $y \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Hinweis: Geeignet umformen.

b) Geben Sie für jedes y im Konvergenzbereich den Grenzwert der Reihe an.

c) Für welche $y > 0$ ist die Reihe konvergent?

Anmerkung: Absolute Konvergenz ist hier nicht die Frage. c) kann unabhängig von a), b) beantwortet werden.

LÖSUNG

a) Man kann die Reihe umschreiben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2y)^{2n+1} = 2y \sum_{n=0}^{\infty} (-4y^2)^n.$$

Es liegt also eine absolut konvergente geometrische Reihe vor. Diese konvergiert genau für $|-4y^2| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Falls man nicht erkennt, dass es sich (bis auf den Faktor $2y$) um eine geometrische Reihe handelt, folgt die absolute Konvergenz auch leicht mittels des Quotientenkriteriums.

b) Konvergiert die Reihe, so lautet ihr Grenzwert nach der geometrischen Summenformel

$$2x \sum_{n=0}^{\infty} (-4y^2)^n = 2y \, \frac{1}{1 - (-4y^2)} = \frac{2y}{1 + 4y^2}.$$

c) Für $y > 0$ liegt eine alternierende Reihe vor, die für $0 < y < \frac{1}{2}$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Für $y = \frac{1}{2}$ oszillieren die Reihenglieder zwischen den beiden Häufungspunkten $+1$ und -1 hin und her, die Reihe ist daher nicht konvergent. Für $y > \frac{1}{2}$ bilden die Reihengleider keine Nullfolge, daher liegt ebenfalls keine Konvergenz vor.

Aufgabe 3.

Eine kleine Kurvendiskussion: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{2x}{1+4x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Zeigen Sie $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Verwenden Sie zwei separate Abschätzungen für x in der Nähe von 0 und x weiter weg von 0, und wählen Sie die beiden Bereiche so, dass sich ingesamt eine möglichst kleine Schranke ergibt.

b) Wir betrachten jetzt nur den Bereich $x \geq 0$, mit $f(x) \geq 0$ (für $x < 0$ alles analog, weil f eine ungerade Funktion ist).

(i) Sei $y \geq 0$ beliebig. Geben Sie alle möglichen x an mit $f(x) = y$. (Fallunterscheidung!)

(ii) Wie lautet das größte y, für das ein derartiges x existiert? Geben Sie den Wert von

$$\sup_{x \in [0,\infty)} f(x)$$

an. Gibt es ein $x_{\max} \geq 0$ mit $x_{\max} = \sup_{x \in [0,\infty)} f(x)$? Falls ja – wie lautet $x_{\max}$?

c) Dafür gibt es 2 Extra-Punkte:

Geben Sie $c \in \mathbb{R}$ an, so dass

$$\lim_{x \to +\infty} |\, x^2 \left(f(x) - c\, x^{-1} \right) | = 0.$$

LÖSUNG

a) Sei $a > 0$. Für $|x| \leq a$ ist $|f(x)| \leq 2\,a$; für $|x| \geq a$ ist $|f(x)| < 2x/(4x^2) \leq 1/(2a)$. Die günstigste Wahl für a ist offenbar gegeben durch $2a = 1/(2a)$, also $a = \frac{1}{2}$. Also gilt $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) (i) Für $y = 0$ ist $x = 0$. Für $y > 0$ führt $f(x) = 2x/(1+4x^2) = y$ auf die quadratische Gleichung

$$4y\, x^2 - 2x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{4y}\,.$$

Für $y < \frac{1}{2}$ gibt es zwei Lösungen x, für $y = \frac{1}{2}$ die 'doppelte' Lösung $x = \frac{1}{2}$. Für $y > \frac{1}{2}$ existiert keine reelle Lösung.

(ii) Daher ist $y = \frac{1}{2}$ der maximal mögliche Wert für $f(x)$, und er wird an der Stelle $x_{\max} = \frac{1}{2}$ angenommen:

$$\sup_{x \in [0,\infty)} f(x) = f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}.$$

c) Betrachte Limes für $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} x^2\Big(\frac{2x}{1+4x^2} - \frac{c}{x}\Big) &= x^2\,\frac{2\,x^2 - c\,(1+4x^2)}{x(1+4x^2)} \\ &= \frac{(2-4c)x^4}{x(1+4x^2)} - c\,\frac{x^2}{x(1+4x^2)} \to 0 \quad \text{für} \quad c = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$