Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger WS 2008/09

ANALYSIS I FÜR TPH

1. Test (28. Oktober 2008)

Gruppe blau (mit Lösung)

a) Untersuchen Sie folgende Funktion auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad x \mapsto x^2 - 2x$$

b) Führen Sie die gleiche Diskussion wie in Aufgabe a) durch für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \operatorname{sgn}(x) \cdot (2x^2 - 1)$$

Weiters: Um welchen Teil Y der negativen reellen Achse ist der Definitionsbereich von f zu vermindern, damit die Funktion mit dem eingeschränkten Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus Y$ bijektiv wird?

Hinweis: Argumentieren Sie mit Hilfe einer genauen Skizze.

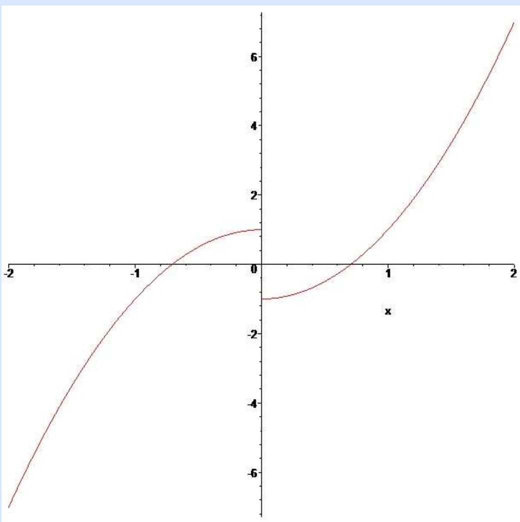
LÖSUNG

a) Die angegebene Funktion ist nicht surjektiv, weil beispielsweise gilt $f(x) \neq 1$, da die quadratische Gleichung $x^2 - 2x - 1 = 0$ keine ganzzahlige Lösung hat.
Sie ist aber injektiv, da für $a, b \in \mathbb{N}$ $a \neq b$

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a^2 - 2a = b^2 - 2b \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 2a - 2b \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 2(a-b) \overset{a-b \neq 0}{\Leftrightarrow} a + b = 2,$$

einen Widerspruch liefert, da $a, b \in \mathbb{N}$ und $a + b = 2$ impliziert, dass $a = b = 1$.

b) Der Graph der Funktion sieht folgendermaßen aus.



Die angegebene Funktion f ist surjektiv. Man betrachte hierfür zunächst den Fall $x, y \in \mathbb{R}^+$ ($\Rightarrow \operatorname{sgn}(x) = 1$). Es gilt

$$y = f(x) = \operatorname{sgn}(x)(2x^2 - 1) \Leftrightarrow y + 1 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y+1}{2}} \overset{x \geq 0}{=} \sqrt{\frac{y+1}{2}}.$$

Analog gilt für $x, y \in \mathbb{R}^-$ ($\Rightarrow \operatorname{sgn}(x) = -1$)

$$y = -2x^2 + 1 \Leftrightarrow 1 - y = 2x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1-y}{2}} \overset{x \leq 0}{=} -\sqrt{\frac{1-y}{2}}.$$

Der Fall $y = 0$ liefert wegen $\operatorname{sgn}(0) = 0$ klarerweise $x = 0$.
Es kann also für jedes $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ (sogar mit selbem Vorzeichen) gefunden werden, für das gilt $f(x) = y$.

f ist aber klarerweise nicht injektiv, da gilt $f(x) = 0$ für $x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Damit die Funktion f bijektiv wird, muss man den Definitionsbereich einschränken auf $\mathbb{R}\backslash(-1, 0]$.
Seien hierfür $a, b \in \mathbb{R}\backslash(-1, 0]$ mit $a \neq b$. Betrachte nun $f(a) = f(b)$, also $\operatorname{sgn}(a)(2a^2 - 1) = \operatorname{sgn}(b)(2b^2 - 1)$.
Für $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b)$ gilt klarerweise $a^2 = b^2$, also auf Grund der Voraussetzung der gleichen Vorzeichen $a = b$.
Betrachte nun den Fall $\operatorname{sgn}(a) \cdot \operatorname{sgn}(b) = -1$. Hierfür ergibt sich (o.B.d.A $\operatorname{sgn}(a) = -1$)

$$2a^2 - 1 = 1 - 2b^2 \Leftrightarrow a^2 = 1 - b^2 \Leftrightarrow a \in (-1, 0),$$

was aber im Widerspruch zu unserem neuen Definitionsbereich steht.
Der Fall $\operatorname{sgn}(a) \cdot \operatorname{sgn}(b) = 0$ also o.B.d.A $a = 0$ liefert klarerweise, dass 0 ebenfalls aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden muss, da f an $b = \sqrt{2}$ eine weitere Nullstelle besitzt.
Die eingeschränkte Funktion ist also auch injektiv.