

ANALYSIS I FÜR TPH

1. Test (28. Oktober 2008)

Gruppe weiß (mit Lösung)

a) Untersuchen Sie folgende Funktion auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto x^2 - x$$

b) Führen Sie die gleiche Diskussion wie in Aufgabe a) durch für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{sgn}(x) \cdot (2 - x^2)$$

Weiters: Um welchen Teil Y der negativen reellen Achse ist der Definitionsbereich von f zu vermindern, damit die Funktion mit dem eingeschränkten Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus Y$ bijektiv wird?

Hinweis: Argumentieren Sie mit Hilfe einer genauen Skizze.

LÖSUNG

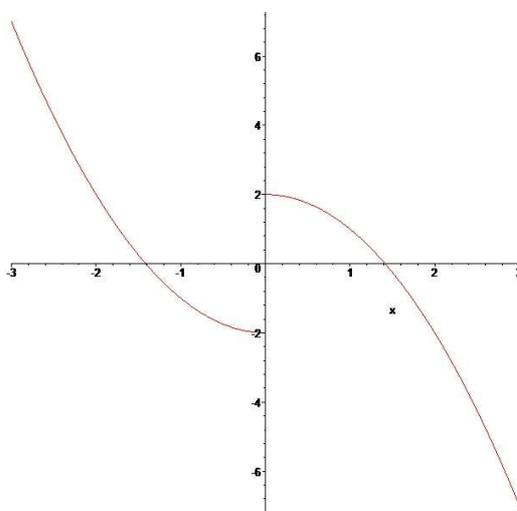
a) Die angegebene Funktion ist nicht surjektiv, weil beispielsweise gilt $f(x) \neq 1$, da die quadratische Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ keine ganzzahlige Lösung hat.

Sie ist aber injektiv, da für $a, b \in \mathbb{N}$ $a \neq b$

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a^2 - a = b^2 - b \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = (a - b) \stackrel{a-b \neq 0}{\Leftrightarrow} a + b = 1,$$

einen Widerspruch liefert, da $a, b \in \mathbb{N}$ und $a + b = 1$ impliziert, dass $a = 0 \notin \mathbb{N}$ bzw. $b = 0 \notin \mathbb{N}$.

b) Der Graph der Funktion sieht folgendermaßen aus.



Die angegebene Funktion f ist surjektiv. Man betrachte hierfür zunächst den Fall $y \in \mathbb{R}^-$, $x \in \mathbb{R}^+$ ($\Rightarrow \operatorname{sgn}(x) = 1$). Es gilt

$$y = f(x) = \operatorname{sgn}(x)(2 - x^2) \Leftrightarrow 2 - y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2 - y} \stackrel{x \geq 0}{\cong} \sqrt{2 - y}.$$

Analog gilt für $y \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^-$ ($\Rightarrow \operatorname{sgn}(x) = -1$)

$$y = x^2 - 2 \Leftrightarrow y + 2 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y + 2} \stackrel{x \leq 0}{\cong} -\sqrt{y + 2}.$$

Der Fall $y = 0$ liefert wegen $\operatorname{sgn}(0) = 0$ klarerweise $x = 0$.

Es kann also für jedes $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ gefunden werden, für das gilt $f(x) = y$.

f ist aber klarerweise nicht injektiv, da gilt $f(x) = 0$ für $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

Damit die Funktion f bijektiv wird, muss man den Definitionsbereich einschränken auf $\mathbb{R} \setminus (-2, 0]$. Seien hierfür $a, b \in \mathbb{R} \setminus (-2, 0]$ mit $a \neq b$. Betrachte nun $f(a) = f(b)$, also $\operatorname{sgn}(a)(2 - a^2) = \operatorname{sgn}(b)(2 - b^2)$.

Für $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b)$ gilt klarerweise $a^2 = b^2$, also auf Grund der Voraussetzung der gleichen Vorzeichen $a = b$.

Betrachte nun den Fall $\operatorname{sgn}(a) \cdot \operatorname{sgn}(b) = -1$. Hierfür ergibt sich (o.B.d.A $\operatorname{sgn}(a) = -1$)

$$2 - a^2 = b^2 - 2 \Leftrightarrow a^2 = 4 - b^2 \Leftrightarrow a \in (-2, 0),$$

was aber im Widerspruch zu unserem neuen Definitionsbereich steht.

Der Fall $\operatorname{sgn}(a) \cdot \operatorname{sgn}(b) = 0$ also o.B.d.A $a = 0$ liefert klarerweise, dass 0 ebenfalls aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden muss, da f an $b = \sqrt{2}$ eine weitere Nullstelle besitzt.

Die eingeschränkte Funktion ist also auch injektiv.