Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger WS 2008/09

ANALYSIS I FÜR TPH

2. Test (25. November 2008)

Gruppe blau (*mit Lösung*)

a) Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

b) Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz für die angegebenen Parameterwerte x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2}} \qquad x > 0$$

Diese Reihe werde nach Aufsummierung von N Elementen abgebrochen. Geben Sie eine Abschätzung für den Reihenrest R_N, die unabhänging von $x > 0$ ist.

LÖSUNG

a) Konvergenz lässt sich mit Hilfe des Quotientenkriteriums zeigen. Für die Quotienten aufeinanderfolgender Summanden gilt:

$$\left|\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\right)\Big/\left(\frac{3^n}{n!}\right)\right| = \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1 \quad \forall n > 3.$$

Also ist das Quotientenkriterium für Reihen erfüllt, und die Reihe ist (absolut) konvergent.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n, \quad \text{mit } b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} > 0.$$

Die Reihe ist eine alternierende Reihe, man kann daher das Kriterium von Leibniz anwenden, um die Konvergenz nachzuweisen. Dazu überprüft man (jeweils für festes $x > 0$):

- Die Folge $\{b_n\}$ ist eine Nullfolge. Es gilt:

$$n^2 + x^2 > n^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Damit hat man die Summandenfolge $\{b_n\}$ abgeschätzt durch die Nullfolge $\{\frac{1}{n}\}$. Da jeweils $b_n > 0$ gilt, muss $\{b_n\}$ ebenfalls eine Nullfolge sein.

- Die Folge $\{b_n\}$ ist monoton fallend, d.h. $b_n > b_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Man zeigt also für alle n:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} &> \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+x^2}} \\ \Leftrightarrow n^2 + x^2 &< (n+1)^2 + x^2 \\ \Leftrightarrow 0 &< 2n+1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

  Letzteres ist eine wahre Aussage, damit ist $\{b_n\}$ monoton fallend.

- Es gilt $|R_N| < b_{N+1} = \frac{1}{\sqrt{(N+1)^2+x^2}} < \frac{1}{N+1}$.