

ANALYSIS I FÜR TPH

2. Test (25. November 2008)

Gruppe weiß (*mit Lösung*)

a) Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

b) Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz für die angegebenen Parameterwerte x :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^2x^2}} \quad x > 1$$

Diese Reihe werde nach Aufsummierung von N Elementen abgebrochen. Geben Sie eine Abschätzung für den Reihenrest R_N , die unabhängig von x ist. Beachten Sie, dass $x > 1$ ist!

LÖSUNG

a) Konvergenz lässt sich mit Hilfe des Quotientenkriteriums zeigen. Für die Quotienten aufeinanderfolgender Summanden gilt:

$$\left| \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \right| / \left| \frac{5^n}{n!} \right| = \frac{5}{n+1} < \frac{5}{6} < 1 \quad \forall n > 5.$$

Also ist das Quotientenkriterium für Reihen erfüllt, und die Reihe ist (absolut) konvergent.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n^2x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad \text{mit } b_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2x^2}} > 0.$$

Die Reihe ist eine alternierende Reihe, man kann daher das Kriterium von Leibniz anwenden, um die Konvergenz nachzuweisen. Dazu überprüft man (jeweils für festes $x > 1$):

- Die Folge $\{b_n\}$ ist eine Nullfolge. Es gilt:

$$1 + n^2x^2 > n^2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1+n^2x^2}} < \frac{1}{xn} = \left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Damit hat man die Summandenfolge $\{b_n\}$ abgeschätzt durch die Nullfolge $\{\frac{1}{n}\}$. Da jeweils $b_n > 0$ gilt, muss $\{b_n\}$ ebenfalls eine Nullfolge sein.

- Die Folge $\{b_n\}$ ist monoton fallend, d.h. $b_n > b_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Man zeigt für alle n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+n^2x^2}} &> \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)^2x^2}} \\ \Leftrightarrow n^2x^2 &< (n+1)^2x^2 \\ \Leftrightarrow 0 &< 2n+1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Letzteres ist eine wahre Aussage, damit ist $\{b_n\}$ monoton fallend.

- Es gilt $|R_N| < b_{N+1} = \frac{1}{\sqrt{1+(N+1)^2x^2}} < \frac{1}{x(N+1)} < \frac{1}{N+1}$, da $x > 1$.