

ANALYSIS I FÜR TPH

3. Test (9. Dezember 2008)

Gruppe gelb (*mit Lösung*)

- a) Bestimmen Sie zunächst die durch die Lösung der folgenden quadratischen Gleichung gegebene Funktion $y = f(x)$ (betrachten Sie nur die *negative* Wurzel):

$$y^2 = \frac{2}{1-2x^2}y - \frac{1-x^2}{(1-2x^2)^2} \quad \textbf{Vorsicht: Schreibweise}$$

Auf welcher Teilmenge D von \mathbb{R} ist die so erhaltene Funktion $y = f(x)$ stetig? An welchen Stellen ist sie unstetig, und von welchem Typ sind diese Unstetigkeitsstellen?

Begründen Sie, warum die Funktion auf einem Intervall $[a, \infty)$, $a > 1$, in dem keine Unstetigkeitsstelle liegt, beschränkt ist. (Abschätzung von $|f(x)|$ für $x \geq a > 1$)

- b) Berechnen Sie die Nullstellen des folgenden Polynoms und zerlegen Sie es in Linearfaktoren:

$$p(x) = -2x^4 + 8x^3 - 10x^2 + 4x$$

LÖSUNG

- a) Löst man die quadratische Gleichung nach y auf so erhält man unter ausschließlicher Betrachtung der negativen Wurzel

$$y = \frac{1}{1-2x^2} - \sqrt{\frac{1}{(1-2x^2)^2} - \frac{1-x^2}{(1-2x^2)^2}} = \frac{1}{1-2x^2} - \sqrt{\frac{x^2}{(1-2x^2)^2}} = \frac{1-x}{1-2x^2}.$$

Als rationale Funktion kann y nur an Nullstellen des Nenners unstetig sein. Man erhält hierfür $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, der Stetigkeitsbereich ist also $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

Die Unstetigkeitsstellen sind klarerweise Polstellen von erster Art, da sich der Nenner in diesem Fall in folgende zwei Linearfaktoren zerlegen lässt

$$(1-2x^2) = -2 \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Um nun zu zeigen, dass die Funktion y auf $[a, \infty)$ mit $a > 1$ beschränkt ist ergeben sich mehrere Möglichkeiten, im Folgenden werden zwei Arten vorgestellt. Zunächst sei festgestellt, dass für $x > 1$ stets $f(x) > 0$ gilt, man kann also den Betrag vernachlässigen.

1. Art: Ansatz: $\exists C > 0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x) < C$. Es gilt also

$$\frac{(x-1)}{(2x^2-1)} < C \quad \Leftrightarrow (x-1) < C(2x^2-1).$$

Speziell gilt also für $C = 1$ $x < 2x^2$, was klarerweise für $x > 1$ gilt. Die Funktion y ist also auf $[a, \infty)$ mit 1 beschränkt.

2. Art: Für die Funktion y gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$, weil

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-1/x}{2x-1/x} = 0.$$

Daher existiert also $\forall \varepsilon > 0$ ein $x_0 \in [a, \infty)$ mit $y(x) < \varepsilon$, $\forall x \geq x_0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ fest, dann ist y auf dem Intervall $[x_0, \infty)$ mit ε beschränkt.

Das Intervall $[a, x_0]$ ist abgeschlossen und da y auf diesem Intervall stetig ist, nimmt y auf $[a, x_0]$ ein Maximum an.

Somit ist y auf $[a, \infty)$ beschränkt mit der Schranke $\max\{\varepsilon, \max_{[a, x_0]} y(x)\}$.

- b) Den Faktor $-2x$ kann man klarerweise herausheben, man erhält also als eine Nullstelle $x = 0$ und das Polynom lässt sich schreiben als

$$p(x) = -2x(x^3 - 4x^2 + 5x - 4)$$

Das hintere Polynom dritten Grades erfüllt, dass die Summe der Koeffizienten gleich 0 ist, also ist $x = 1$ eine Nullstelle und nach Abspaltung des Linearfaktors erhält man

$$p(x) = -2x(x-1)(x^2 - 3x + 2)$$

Die Nullstellen des Polynoms zweiten Grades sind $x = 1$ und $x = 2$. Das Polynom lässt sich also folgendermaßen in Linearfaktoren aufgespalten darstellen

$$p(x) = -2x(x-1)^2(x-2)$$