Institut für Analysis und Scientific Computing WS 2008/09
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

# ANALYSIS I FÜR TPH

3. Test (9. Dezember 2008)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

a) Bestimmen Sie zunächst die durch die Lösung der folgenden quadratischen Gleichung gegebene Funktion $y = f(x)$ (betrachten Sie nur die *negative* Wurzel):

$$y^2 = \frac{2}{1-3x^2}\,y - \frac{1-4x^2}{(1-3x^2)^2}$$ **Vorsicht:** Schreibweise

Auf welcher Teilmenge $D$ von $\mathbb{R}$ ist die so erhaltene Funktion $y = f(x)$ stetig? An welchen Stellen ist sie unstetig, und von welchem Typ sind diese Unstetigkeitsstellen?

Begründen Sie, warum die Funktion auf einem Intervall $[a, \infty)$, $a > 1$, in dem keine Unstetigkeitsstelle liegt, beschränkt ist. (Abschätzung von $|f(x)|$ für $x \geq a > 1$)

b) Berechnen Sie die Nullstellen des folgenden Polynoms und zerlegen Sie es in Linearfaktoren:

$$p(x) = 3x^4 + 3x^3 - 15x^2 + 9x$$

## LÖSUNG

a) Löst man die quadratische Gleichung nach $y$ auf so erhält man unter ausschließlicher Betrachtung der negativen Wurzel

$$y = \frac{1}{1-3x^2} - \sqrt{\frac{1}{(1-3x^2)^2} - \frac{1-4x^2}{(1-3x^2)^2}} = \frac{1}{1-3x^2} - \sqrt{\frac{4x^2}{(1-3x^2)^2}} = \frac{1-2x}{1-3x^2}.$$

Als rationale Funktion kann $y$ nur an Nullstellen des Nenners unstetig sein. Man erhält hierfür $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, der Stetigkeitsbereich ist also $D = \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\}$.
Die Unstetigkeitsstellen sind klarerweise Polstellen von erster Art, da sich der Nenner in diesem Fall in folgende zwei Linearfaktoren zerlegen lässt

$$(1-3x^2) = -3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Um nun zu zeigen, dass die Funktion $y$ auf $[a, \infty)$ mit $a > 1$ beschränkt ist ergeben sich mehrere Möglichkeiten, im Folgenden werden zwei Arten vorgestellt. Zunächst sei festgestellt, dass für $x > 1$ stets $f(x) > 0$ gilt, man kann also den Betrag vernachlässigen.
*1.Art:* Ansatz: $\exists C > 0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x) < C$. Es gilt also

$$\frac{(2x-1)}{(3x^2-1)} < C \quad \Leftrightarrow (2x-1) < C(3x^2-1).$$

Speziell gilt also für $C = 1$ $2x < 3x^2$, was klarerweise für $x > 1$ gilt. Die Funktion $y$ ist also auf $[a, \infty)$ mit 1 beschränkt.

*2.Art:* Für die Funktion $y$ gilt $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, weil

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{3x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-1/x}{3x-1/x} = 0.$$

Daher existiert also $\forall \varepsilon > 0$ ein $x_0 \in [a, \infty)$ mit $y(x) < \varepsilon$, $\forall x \geq x_0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ fest, dann ist $y$ auf dem Intervall $[x_0, \infty)$ mit $\varepsilon$ beschränkt.
Das Intervall $[a, x_0]$ ist abgeschlossen und da $y$ auf diesem Intervall stetig ist, nimmt $y$ auf $[a, x_0]$ ein Maximum an.
Somit ist $y$ auf $[a, \infty)$ beschränkt mit der Schranke $\max\{\varepsilon, \max_{[a,x_0]} y(x)\}$.

b) Den Faktor $3x$ kann man klarerweise herausheben, man erhält also als eine Nullstelle $x = 0$ und das Polynom lässt sich schreiben als

$$p(x) = 3x(x^3 + x^2 - 5x + 3)$$

Das hintere Polynom dritten Grades erfüllt, dass die Summe der Koeffizienten gleich 0 ist, also ist $x = 1$ eine Nullstelle und nach Abspaltung des Linearfaktors erhält man

$$p(x) = 3x(x-1)(x^2 + 2x - 3)$$

Die Nullstellen des Polynoms zweiten Grades sind $x = 1$ und $x = -3$. Das Polynom lässt sich also folgendermaßen in Linearfaktoren aufgespaltet darstellen

$$p(x) = 3x(x-1)^2(x+3)$$