Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger WS 2008/09

# ANALYSIS I FÜR TPH

4. Test (20. Januar 2009)

Gruppe gelb *(mit Lösung)*

a) Berechnen Sie die Ableitung **ohne** Verwendung der Quotientenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{5+y^6}\right).$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert mittels der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{(x^2)}}{\cos x-1}.$$

LÖSUNG

a) Unter Verwendung der beiden Funktionen

$$g:\quad y\mapsto 5+y^6,$$
$$h:\quad t\mapsto \tfrac{1}{t}$$

lässt sich die zu differenzierende Funktion

$$f: y\mapsto \frac{1}{5+y^6}$$

schreiben als $f=h\circ g$. Für die Ableitungen $g'$, $h'$ erhält man

$$g'(y)=6y^5,\quad h'(t)=-\frac{1}{y^2}.$$

Bildet man nun mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Verknüpfung $f=h\circ g$, so erhlt man

$$\begin{aligned} f'(y) &= \left.\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=g(y)}\cdot\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y} \\ &= -\frac{1}{(5+y^6)^2}\cdot 6y^5 = -\frac{6y^5}{(5+y^6)^2}. \end{aligned}$$

b) Einmalige Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{(x^2)}}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{(x^2)}}{-\sin x}$$

Es liegt noch immer ein unbestimmter Ausdruck vor, man wendet die Regel von de l'Hospital ein zweites Mal an:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{(x^2)}}{-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{(x^2)}-4x^2e^{(x^2)}}{-\cos x}$$

Zähler und Nenner konvergieren nun jeweils gegen einen Wert ungleich Null:

$$\frac{-2e^{(x^2)}-4x^2e^{(x^2)}}{-\cos x}=2.$$

Der gesuchte Limes ist daher 2.