Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger WS 2008/09

# ANALYSIS I FÜR TPH

4. Test (20. Januar 2009)

Gruppe weiß *(mit Lösung)*

a) Berechnen Sie die Ableitung **ohne** Verwendung der Quotientenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2+x^4}\right).$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert mittels der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{(y^2)}-1}{\sin^2 y}.$$

LÖSUNG

a) Unter Verwendung der beiden Funktionen

$$\begin{aligned} g:&\quad x\mapsto 2+x^4,\\ h:&\quad t\mapsto \tfrac{1}{t} \end{aligned}$$

lässt sich die zu differenzierende Funktion

$$f:x\mapsto\frac{1}{2+x^4}$$

schreiben als $f=h\circ g$. Für die Ableitungen $g'$, $h'$ erhält man

$$g'(x)=4x^3,\quad h'(t)=-\frac{1}{x^2}.$$

Bildet man nun mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung der Verknüpfung $f=h\circ g$, so erhält man

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left.\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=g(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\\ &= -\frac{1}{(2+x^4)^2}\cdot 4x^3 = -\frac{4x^3}{(2+x^4)^2}. \end{aligned}$$

b) Einmalige Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert:

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{(y^2)}-1}{\sin^2 y}=\lim_{y\to 0}\frac{2ye^{(y^2)}}{2\sin y\cos y}$$

Es liegt noch immer ein unbestimmter Ausdruck vor, man wendet die Regel von de l'Hospital ein zweites Mal an:

$$\lim_{y\to 0}\frac{2ye^{(y^2)}}{2\sin y\cos y}=\lim_{y\to 0}\frac{2e^{(y^2)}+4y^2e^{(y^2)}}{2\cos^2 y-2\sin^2 y}$$

Zähler und Nenner konvergieren nun jeweils gegen einen Wert ungleich Null:

$$\lim_{y\to 0}\frac{2e^{(y^2)}+4y^2e^{(y^2)}}{2\cos^2 y-2\sin^2 y}=\frac{2}{2}=1.$$

Der gesuchte Limes ist daher 1.