Institut für Analysis und Scientific Computing TU Wien
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger WS 2009/10

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Haupttest (FR, 18.12.2009) / Gruppe weiß (mit Lösung)

⟶

• **Aufgabe 1.** Gegeben sei eine feste reelle Zahl $d \in (-1,1)$ und die Folge $\{a_n\} = \{a_n(d)\} = \{\,\frac{d^n}{n}\,\}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) *[1 P.]* Zeigen Sie: $\{|a_n(d)|\}$ ist eine streng monoton fallende Nullfolge.

b) *[2 P.]* Zeigen Sie: Die Reihe $S(d) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(d)$ ist absolut konvergent.

c) *[3 P.]* Zeigen Sie

$$|S(d)| \;\leq\; \frac{|d|}{1-|d|}$$

Hinweis: Geometrische Reihe ...

d) *[2 Extra-P.]* Man betrachte die Reihe $S_{\pm}(d) := \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n(d)+a_n(-d))$. Warum folgt aus der absoluten Konvergenz von $S(d)$ und $S(-d)$ (siehe b)) auch die von $S_{\pm}(d)$? (Begründung angeben!) Zeigen Sie auch die beiden Identitäten

$$S_{\pm}(d) \;=\; S(d)+S(-d) \;=\; S(x) \quad - \quad \text{wie lautet } x\,?$$

$$\boxed{x \;=\; d^2}$$

LÖSUNG

a) Strenge Monotonie + Nullfolge folgt aus den Ungleichungen

$$|a_{n+1}| \;=\; \frac{|d|^{n+1}}{n+1} \;<\; |d|\,\frac{|d|^n}{n} \;=\; |d|\,|a_n| \;<\; |a_n| \;<\; \frac{1}{n}$$

b) Absolute Konvergenz: Verwende Quotientenkriterium in Grenzwertform:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{n\,|d|^{n+1}}{(n+1)\,|d|^n} \;=\; \lim_{n\to\infty}\underbrace{|d|}_{<1}\,\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \;<\; 1 \quad \dots \quad \text{O.K.}$$

c) Geometrische Reihe als konvergente Majorante:

$$|S(d)| \;=\; \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^n}{n}\right| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|d|^n}{n} \;<\; \sum_{n=1}^{\infty}|d|^n \;=\; \frac{|d|}{1-|d|}$$

d) Absolute Konvergenz von $S_{\pm}(d)$ folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung aus:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(d)+a_n(-d)| \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty}|a_n(d)|+|a_n(-d)| \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}|a_n(d)|+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(-d)|$$

Betrachtet man $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d^n}{n}+\frac{(-1)^n d^n}{n}\right)$, so sieht man, dass für ungerade n die Summanden einander aufheben und für gerade n die gleichen Summanden zweimal vorkommen.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d^n}{n}+\frac{(-1)^n d^n}{n}\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}2\,\frac{d^{2n}}{2n} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(d^2)^n}{n}$$

Also ist $x = d^2$.

Anmerkung: Die betrachtete Reihe ist eine Darstellung für $-\ln(1-d) = \ln\frac{1}{1-d}$, $|d|<1$ (Taylorreihe um die Entwicklungsstelle $d_0 = 0$). Das Ergebnis von d) entspricht der Identität $-\ln(1-d)-\ln(1+d) = -\ln((1-d)(1+d)) = -\ln(1-d^2)$.

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{e^{1+x}}{1+e^{x}}$.

a) *[2.5 P.]* Zeigen Sie ohne Zuhilfenahme der Ableitung, dass $f(x)$ streng monoton wachsend ist.

b) *[1.5 P.]* Geben Sie den Wertebereich $W_f = f(\mathbb{R})$ und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W_f \to \mathbb{R}$ an.[1]

$$\boxed{W_f \;=\; (0, e)} \qquad \boxed{f^{-1}(y) \;=\; -\ln\Big(\frac{e}{y} - 1\Big)}$$

c) *[2 P.]* Der Funktionsausdruck $g(x) := f(x^{-1})$ (f wie oben) ist an der Stelle $x = 0$ nicht wohldefiniert. Untersuchen Sie das Verhalten von $g(x)$ in der Nähe von $x = 0$. Welche Art von Unstetigkeit liegt vor?

(Hebbare Unstetigkeit / Funktionswert? Pol? Sprungstelle / Sprunghöhe?)

Antwort zu c): $x = 0$ ist Sprungstelle mit Sprunghöhe e

LÖSUNG

a) streng monoton wachsend:

$$\begin{aligned}
& & \frac{e^{1+x_1}}{1+e^{x_1}} &< \frac{e^{1+x_2}}{1+e^{x_2}} \\
\Leftrightarrow & & e^{1+x_1}(1+e^{x_2}) &< e^{1+x_2}(1+e^{x_1}) \\
\Leftrightarrow & & e^{1+x_1} + e^{1+x_1+x_2} &< e^{1+x_2} + e^{1+x_1+x_2} \\
\Leftrightarrow & & e^{1+x_1} &< e^{1+x_2} \\
\Leftrightarrow & & e^{x_1} &< e^{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x_2,
\end{aligned}$$

da e^x streng monoton wachsend ist.

b) Wertebereich: $f(x) = e\,\frac{e^x}{1+e^x}$. Aus der Monotonie gemäß a) und

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{-x}+1} = 1$$

folgt $W_f = (0, e)$.

Umkehrfunktion: Für $y \in Wf$ gilt

$$y = \frac{e\,e^x}{1+e^x} = \frac{e}{e^{-x}+1} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} + 1 = \frac{e}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\ln\Big(\frac{e}{y} - 1\Big) = \ln\Big(\frac{1}{\frac{e}{y} - 1}\Big)$$

c) $x = 0$ ist Sprungstelle von $g(x) = f(x^{-1})$ mit Sprunghöhe e, weil:

$$g(x) = \frac{e\,e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \frac{e}{\frac{1}{e^{1/x}} + 1}$$

mit

$$g(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{e}{\underbrace{\Big(\frac{1}{e^{1/x}}\Big)}_{\to 0} + 1} = e, \qquad g(0-) = \lim_{x\to 0-} \frac{e}{\underbrace{\Big(\frac{1}{e^{1/x}}\Big)}_{\to\infty} + 1} = 0$$

[1] Die Monotonie gemäß a) darf hier vorausgesetzt werden, auch wenn a) nicht gezeigt wurde.

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \pi\cos(x + \pi\cos x)$.

(i) *[1 P.]* Ist $f(x)$ periodisch? Falls ja – wie lautet die Periode? (1P)

(ii) *[2 P.]* Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Antwort zu a): (i): Periode $p = 2\pi$ (ii): $y = \pi(\pi-1)(x-\frac{\pi}{2})$

b) *[3 P.]* Gegeben sei die Funktion $g(x) = e^x \sin x$. Zeigen Sie: g ist eine Lösung der Differentialgleichung $g^{(4)}(x) + 4\,g(x) = c = \text{const.}$, und bestimmen Sie den Wert von c.

$\boxed{c = 0}$

c) *[2 Extra-P.]* Sei $n \in \mathbb{N}$ *ungerade* und $F(x)$ eine mindestens n-mal differenzierbare Funktion. Geben Sie den Wert der n-ten Ableitung der Funktion $G(x) := F(x)\cdot F(1-x)$ an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ an. (Herleitung!)

$\boxed{G^{(n)}(\tfrac{1}{2}) = 0}$

LÖSUNG

a) (i) Periodizität: $f(x) = f(x+p)$ mit $p \in \mathbb{R}$?

$\cos x$ hat Periode $2\pi \quad \Rightarrow \quad$ auch $f(x)$ hat Periode $p = 2\pi$.

(ii) Tangente: Mit $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $f'(x) = -\pi\sin(x+\pi\cos x)(1-\pi\sin x)$, $f'(0) = \pi(\pi-1)$ folgt

$$y = \pi(\pi-1)(x-\tfrac{\pi}{2})$$

b)

$$\begin{aligned}
g'(x) &= e^x(\sin x + \cos x)\\
g''(x) &= 2\,e^x\cos x + e^x\sin x - e^x\sin x = 2\,e^x\cos x\\
g'''(x) &= 2\,e^x(\cos x - \sin x)\\
g^{(4)}(x) &= -4\,e^x\sin x = -4\,g(x) \quad \Rightarrow \quad c = 0
\end{aligned}$$

c) Unter Beachtung von $\frac{d^k}{dx^k}F(1-x) = (-1)^k F^{(k)}(1-x)$ (= k-te Ableitung $F^{(k)}$ ausgewertet an der Stelle $1-x$) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
G'(x) &= F'(x)F(1-x) - F(x)F'(1-x)\\
G''(x) &= F''(x)F(1-x) - 2\,F'(x)F'(1-x) + F(x)F''(1-x)\\
G'''(x) &= F'''(x)F(1-x) - 3\,F''(x)F'(1-x) + 3\,F'(x)F''(1-x) - F(x)F'''(1-x)
\end{aligned}$$

usw. Offensichtlich heben einander bei den ungeraden Ableitungen an der Stelle $x = \frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2}$ die Werte der Ableitungen weg, weil jeder Term einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen auftritt. Allgemein für ungerade n:

$$\begin{aligned}
G^{(n)}(x) = {}& F^{(n)}(x)F^{(0)}(1-x) - \binom{n}{1}F^{(n-1)}(x)F^{(1)}(1-x) + \binom{n}{2}F^{(n-2)}(x)F^{(2)}(1-x) + \ldots\\
&\ldots - \binom{n}{n-2}F^{(2)}(x)F^{(n-2)}(1-x) + \binom{n}{n-1}F^{(1)}(x)F^{(n-1)}(1-x) - F^{(0)}(x)F^{(n)}(1-x)
\end{aligned}$$

wobei $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Daher gilt für ungerade n und $x = \frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2}$: $G^{(n)}(\frac{1}{2}) = 0$.

Anmerkung: $G(x)$ ist eine 'gerade Funktion bezüglich der Stelle $\frac{1}{2}$', d.h. mit $x = \frac{1}{2}+h$ gilt $g(h) := G(\frac{1}{2}+h) = F(\frac{1}{2}+h)\cdot F(\frac{1}{2}-h) = G(\frac{1}{2}-h) = g(-h)$ (gerade Funktion in h). Man könnte auch den Satz von Taylor (Kap. 10) verwenden, um zu zeigen $g^{(n)}(0) = 0$ für eine gerade Funktion $g(x)$ und n ungerade. Daraus folgt das Resultat wegen $G^{(n)}(\frac{1}{2}) = g^{(n)}(0)$.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2009/10

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Haupttest (FR, 18.12.2009) / Gruppe bunt (mit Lösung)

⟶

• **Aufgabe 1.** Für eine feste reelle Zahl $c > 1$ sei die Folge $\{a_n\}$ gegeben durch $a_n = a_n(c) = \dfrac{1}{c^n\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) *[1 P.]* Zeigen Sie: $\{a_n(c)\}$ ist eine streng monoton fallende Nullfolge.

b) *[2 P.]* Zeigen Sie: Die Reihe $R(c) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(c)$ ist konvergent.

c) *[3 P.]* Zeigen Sie

$$R(c) \;\leq\; \frac{1}{c-1}$$

Hinweis: Geometrische Reihe ...

d) *[2 Extra-P.]* Man betrachte die Reihe $S(c) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c}\sqrt[c]{n}$.

Für welche Werte von $c > 1$ ist diese Reihe konvergent? (Begründung angeben!)

LÖSUNG

a) Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^n\sqrt{n}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{c^n}}_{\to 0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0} \;=\; 0$$

streng monoton fallend:

$$a_{n+1} < a_n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{c^{n+1}\sqrt{n+1}} < \frac{1}{c^n\sqrt{n}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{c\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ist eine wahre Aussage, da $c > 1$.

b) Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \left|\frac{c^n\sqrt{n}}{c^{n+1}\sqrt{n+1}}\right| \;=\; \frac{1}{c}\sqrt{\frac{n}{n+1}}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \frac{1}{c} < 1$$

$\Rightarrow$ (absolute) Konvergenz.

c)

$$R(c) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n\sqrt{n}} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^{n+1}\sqrt{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{c}\right)^{n+1} \;=\; \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{c}\right)^{n} \;=\; \frac{1}{c}\frac{1}{1-\frac{1}{c}} \;=\; \frac{1}{c-1}$$

$$R(c) \;\leq\; \frac{1}{c-1}$$

d) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für $k > 1$ konvergiert.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{-c}\sqrt[c]{n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{c-\frac{1}{c}}}$$

$$c - \frac{1}{c} > 1 \quad\Leftrightarrow\quad c^2 - c - 1 > 0 \qquad\Rightarrow\qquad c > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

als Bedingung für Konvergenz. (Die Nullstellen von $c^2 - c - 1 \;=\; 0$ lauten $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$; und für $c > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ ist $c - \frac{1}{c} > 1$.)

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := e^{\frac{1-x}{1+x}}$.

a) *[2.5 P.]* Zeigen Sie ohne Zuhilfenahme der Ableitung, dass $f(x)$ streng monoton fallend ist.

b) *[1.5 P.]* Geben Sie den Wertebereich $W_f = f([0,\infty))$ und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W_f \to \mathbb{R}$ an.[1]

$$\boxed{W_f \;=\; (\,\tfrac{1}{e}, e\,]} \qquad \boxed{f^{-1}(y) \;=\; \frac{1-\ln y}{1+\ln y}}$$

c) *[2 P.]* Berechnen Sie den Wert von $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^n)$ (f wie oben) in Abhängigkeit von $x \in [0,\infty)$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x^n) \;=\; \dots \quad 1\ (x=1);\quad e\ (x<1);\quad \tfrac{1}{e}\ (x>1)}$$

Hinweis: Der Limes nimmt nur drei verschiedene Werte an.

LÖSUNG

a) streng monoton fallend $:\Leftrightarrow \quad x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Da $\frac{1-x}{1+x}$ für $x \geq 0$ streng monoton fallend und e^x streng monoton wachsend ist, folgt

$$x_1 > x_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{1-x_1}{1+x_1} < \frac{1-x_2}{1+x_2} \quad\Rightarrow\quad e^{\frac{1-x_1}{1+x_1}} < e^{\frac{1-x_2}{1+x_2}}$$

b) Wertebereich: Aus der Monotonie, $f(0) = e$ sowie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{e}$ folgt $W_f = (\frac{1}{e}, e]$.

Umkehrfunktion: Für $y \in W_f$ gilt

$$y = e^{\frac{1-x}{1+x}} \quad\Leftrightarrow\quad \ln y = \frac{1-x}{1+x} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1-\ln y}{1+\ln y}$$

c)

$$f(x^n) = e^{\frac{1-x^n}{1+x^n}}$$

Fallunterscheidung:

- $x = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n) \;=\; 1$$

- $|x| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n) \;=\; e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\overbrace{x^n}^{\to 0}}{1+\underbrace{x^n}_{\to 0}}} \;=\; e$$

- $|x| > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n) \;=\; e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\overbrace{1/x^n}^{\to 0}-1}{\underbrace{1/x^n}_{\to 0}+1}} \;=\; \frac{1}{e}$$

[1] Die Monotonie gemäß a) darf hier vorausgesetzt werden, auch wenn a) nicht gezeigt wurde.

- **Aufgabe 3.**

  a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \pi + \sin(\pi\, x + \sin(\pi x))$.

  (i) *[1 P.]* Ist $f(x)$ periodisch? Falls ja – wie lautet die Periode? (1P)

  (ii) *[2 P.]* Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

  Antwort zu a): (i): Periode $p = 2$ (ii): $y \;=\; \pi + 2\pi x$

  b) *[3 P.]* Gegeben sei die Funktion $g(x) = \sin x \cosh x$. Zeigen Sie: g ist eine Lösung der Differentialgleichung $g^{(4)}(x) = c\, g(x)$, $c = \text{const.}$, und bestimmen Sie den Wert von c.

  $c \;=\; -4$

  c) *[2 Extra-P.]* Sei $n \in \mathbb{N}$ *ungerade* und $F(x)$ eine mindestens n-mal differenzierbare Funktion. Geben Sie den Wert der n-ten Ableitung der Funktion $G(x) := F(x) \cdot F(-x)$ an der Stelle $x = 0$ an. (Herleitung!)

  $G^{(n)}(0) \;=\; 0$

LÖSUNG

a) (i) Periodizität: $f(x) = f(x + p)$ mit $p \in \mathbb{R}$?

$\sin(\pi x)$ hat Periode 2 $\Rightarrow$ auch $f(x)$ hat Periode $p = 2$.

(ii) Tangente: Mit $f(0) = \pi$ und $f'(x) = \cos(\pi x + \sin(\pi x))(\pi + \pi \cos(\pi x))$, $f'(0) = 2\pi$ folgt

$$y \;=\; \pi + 2\pi x$$

b)

$$\begin{aligned} g'(x) \;&=\; \cos x\, \cosh x + \sin x\, \sinh x \\ g''(x) \;&=\; 2\, \cos x\, \sinh x \\ g'''(x) \;&=\; 2\, (\cos x\, \cosh x - \sin x\, \sinh x) \\ g^{(4)}(x) \;&=\; -\,4\, \sin x\, \cosh x = -4\, g(x) \end{aligned}$$

c) Unter Beachtung von $\frac{d^k}{dx^k} F(-x) \;=\; (-1)^k F^{(k)}(-x)$ (= k - te Ableitung $F^{(k)}$ ausgewertet an der Stelle $-x$) ergibt sich:

$$\begin{aligned} G'(x) \;&=\; F'(x)F(-x) - F(x)F'(-x) \\ G''(x) \;&=\; F''(x)F(-x) - 2\, F'(x)F'(-x) + F(x)F''(-x) \\ G'''(x) \;&=\; F'''(x)F(-x) - 3\, F''(x)F'(-x) + 3\, F'(x)F''(-x) - F(x)F'''(-x) \end{aligned}$$

usw. Offensichtlich heben einander bei den ungeraden Ableitungen an der Stelle $x = 0$ die Werte der Ableitungen weg, weil jeder Term einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen auftritt. Allgemein für ungerade n:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x) \;=\; & F^{(n)}(x)F^{(0)}(-x) - \binom{n}{1} F^{(n-1)}(x)F^{(1)}(-x) + \binom{n}{2} F^{(n-2)}(x)F^{(2)}(-x) \;+ \ldots \\ & \ldots - \binom{n}{n-2} F^{(2)}(x)F^{(n-2)}(-x) + \binom{n}{n-1} F^{(1)}(x)F^{(n-1)}(-x) - F^{(0)}(x)F^{(n)}(-x) \end{aligned}$$

wobei $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Daher gilt für ungerade n und $x = -x = 0$: $G^{(n)}(0) = 0$.

Anmerkung: $G(x)$ ist eine gerade Funktion. Man könnte auch den Satz von Taylor (Kap. 10) verwenden, um zu zeigen $G^{(n)}(0) = 0$ für eine gerade Funktion $G(x)$ und n ungerade.