Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2009/10

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Test (MO, 9.11.2009) / Gruppe weiß *(mit Lösung)*

- Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$, definiert durch $a_n := (2n-3)/(2+3n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

  a) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass $\{a_n\}$ streng monoton wachsend ist. (*Hinweis: geeignet umformen.*)

  b) *[2 Punkte]* Zeigen Sie, dass $\{a_n\}$ beschränkt ist.

  c) *[2 Extra-Bonuspunkte]* Bestimmen Sie den Wert von $\sup\{a_n\}$. [1]

c): $\sup\{a_n\} =$

LÖSUNG

a) 2 alternative Lösungswege:

- Folge $\{a_n\}$ streng monoton wachsend $\leftrightarrow a_{n+1} > a_n$

$$\frac{2(n+1)-3}{2+3(n+1)} > \frac{2n-3}{2+3n}$$
$$\frac{2n-1}{3n+5} > \frac{2n-3}{2+3n}$$
$$(2n-1)(3n+2) > (2n-3)(3n+5)$$
$$-2 > -15$$

  Dies liefert eine wahre Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$, womit die strenge Monotonie gezeigt ist.

- $$\frac{2n-3}{2+3n} = \frac{2-\frac{3}{n}}{\frac{2}{n}+3}$$

  Der so umgeformte Zähler ergibt eine streng monoton wachsende Folge, der Nenner eine streng monoton fallende. Der gesamte Bruch stellt somit für steigende n eine streng monoton wachsende Folge dar.

b)
- untere Schranke: Folge streng monoton wachsend $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ untere Schranke ist $a_1 = -\frac{1}{5}$
- obere Schranke: 2 alternative Lösungswege

[1] Anmerkung: Mit a)–c) folgt $\sup\{a_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ aufgrund eines Satzes aus der Vorlesung.

- Vermutung: 1 ist obere Schranke

$$\frac{2n-3}{2+3n} \leq 1$$
$$n \geq -5$$

Dies liefert eine wahre Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$, womit die Beschränktheit nach oben gezeigt ist.

- Folge streng monoton wachsend und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \overbrace{\frac{3}{n}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0} + 3} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow \frac{2}{3}$ ist obere Schranke von $\{a_n\}$.

c) Folge streng monoton wachsend und nach oben beschränkt (aus a) und b))
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to 0} a_n = sup\{a_n\} = \frac{2}{3}$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2009/10

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Test (MO, 9.11.2009) / Gruppe bunt (*mit Lösung*)

- Gegeben sei die Folge $\{b_n\}$, definiert durch $b_n := (3n-8)/(9+4n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

  a) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass $\{b_n\}$ streng monoton wachsend ist. (*Hinweis: geeignet umformen.*)

  b) *[2 Punkte]* Zeigen Sie, dass $\{b_n\}$ beschränkt ist.

  c) *[2 Extra-Bonuspunkte]* Bestimmen Sie den Wert von $\sup\{b_n\}$. [1]

c): $\sup\{b_n\} =$

LÖSUNG

a) 2 alternative Lösungswege:

- Folge $\{b_n\}$ streng monoton wachsend $\leftrightarrow b_{n+1} > b_n$

$$\frac{3(n+1)-8}{9+4(n+1)} > \frac{3n-8}{9+4n}$$
$$\frac{3n-5}{4n+13} > \frac{3n-8}{9+4n}$$
$$(3n-5)(9+4n) > (3n-8)(4n+13)$$
$$-45 > -104$$

  Dies liefert eine wahre Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$, womit die strenge Monotonie gezeigt ist.

- $$\frac{3n-8}{9+4n} = \frac{3-\frac{8}{n}}{4+\frac{9}{n}}$$

  Der so umgeformte Zähler ergibt eine streng monoton wachsende Folge, der Nenner eine streng monoton fallende. Der gesamte Bruch stellt somit für steigende n eine streng monoton wachsende Folge dar.

b)
- untere Schranke: Folge streng monoton wachsend $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ untere Schranke ist $b_1 = -\frac{5}{13}$
- obere Schranke: 2 alternative Lösungswege

[1] Anmerkung: Mit a)–c) folgt $\sup\{b_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ aufgrund eines Satzes aus der Vorlesung.

- Vermutung: 1 ist obere Schranke

$$\frac{3n-8}{9+4n} \leq 1$$
$$n \geq -17$$

  Dies liefert eine wahre Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$, womit die Beschränktheit nach oben gezeigt ist.
- Folge streng monoton wachsend und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-8}{9+4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \overbrace{\frac{8}{n}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{9}{n}}_{\to 0} + 4} = \frac{3}{4}$$

  $\Rightarrow \frac{3}{4}$ ist obere Schranke von $\{b_n\}$.

c) Folge streng monoton wachsend und nach oben beschränkt (aus a) und b))
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to 0} b_n = sup\{b_n\} = \frac{3}{4}$