Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2009/10

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, UE (103.088)

2. Test (MO, 16.11.2009) / Gruppe weiß *(mit Lösung)*

---

a) *[3 Punkte]* Untersuchen Sie die unendliche Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2-2}}$$

auf Konvergenz.

b) *[2 Punkte]* Untersuchen Sie die in a) gegebene Reihe auf absolute Konvergenz.

c) *[1 Punkt]* Die folgende Funktion ist an der Stelle $x = 1$ nicht wohldefiniert:

$$g(x) := \frac{1-x^4}{x-1} \qquad \boxed{g(1) := \qquad}$$

Setzen Sie den Wert von $g(1)$ so fest, dass g an $x = 1$ stetig ist (Begründung angeben).

LÖSUNG

a) Die Reihe lässt sich schreiben als

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2-2}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n c_n \quad \text{mit } c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}} > 0,\ \forall n \geq 2$$

Es handelt sich um eine *alternierende Reihe*. Für die Summanden c_n gilt:

- Die Folge c_n ist für $n \geq 2$ streng monoton fallend:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &< c_n \\ \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2-2}} &< \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}} \\ (n+1)^2-2 &> n^2-2 \qquad (\text{für } n \geq 2) \\ n^2+2n+1-2 &> n^2-2 \\ 2n+1 &> 0 \end{aligned}$$

  Die letzte Ungleichung ist für alle $n \geq 2$ eine wahre Aussage.

- Die Folge c_n ist eine Nullfolge:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}} = \frac{\frac{1}{n^{2/3}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}}} \to \frac{0}{\sqrt[3]{1-0}} = 0 \text{ für } n \to \infty$$

Insgesamt wurde also gezeigt: Die Folge c_n ist eine monoton gegen Null strebende Folge. Aus dem Konvergenzkriterium von Leibniz folgt daher, dass die alternierende Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2-2}}$$

konvergiert.

b) Sei wieder $c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}}$. Es gilt die folgende Abschätzung

$$c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$. Daher ist laut Minorantenkriterium die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n c_n$ nicht absolut konvergent.

c) 2 alternative Lösungswege

- Aus der geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

folgt mit $g(x) = -\frac{1-x^4}{1-x}$ durch Vergleich

$$g(x) = -\sum_{k=0}^{3} x^k = -\left(1+x+x^2+x^3\right)$$

was ein Polynom darstellt (Funktion ist somit an x=1 stetig). Speziell gilt $g(1) = -4$.

- Da 1 eine Nullstelle des Nenner- und Zählerpolynoms darstellt erhält man durch Polynomdivision das Polynom $g(x) = -(x^3+x^2+x+1)$ mit $g(1) = -4$.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger TU Wien
WS 2009/10

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)
2. Test (MO, 16.11.2009) / Gruppe bunt *(mit Lösung)*

---

a) *[3 Punkte]* Untersuchen Sie die unendliche Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} b_k \;=\; \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[4]{k^3-3}}$$

auf Konvergenz.

b) *[2 Punkte]* Untersuchen Sie die in a) gegebene Reihe auf absolute Konvergenz.

c) *[1 Punkt]* Die folgende Funktion ist an der Stelle $u = 1$ nicht wohldefiniert:

$$f(u) \;:=\; \frac{1-u}{u^3-1} \qquad\qquad \boxed{f(1) \;:= \qquad}$$

Setzen Sie den Wert von $f(1)$ so fest, dass f an $u = 1$ stetig ist (Begründung angeben).

LÖSUNG

a) Die Reihe lässt sich schreiben als

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3-3}} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n c_n \quad \text{mit } c_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3-3}} > 0,\ \forall n \geq 2$$

Es handelt sich um eine *alternierende Reihe*. Für die Summanden c_n gilt:

- Die Folge c_n ist für $n \geq 2$ streng monoton fallend:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &< c_n \\ \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3-3}} &< \frac{1}{\sqrt[4]{n^3-3}} \\ (n+1)^3 - 3 &> n^3 - 3 \qquad (\text{für } n \geq 2) \\ n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 3 &> n^3 - 3 \\ 3n^2 + 3n + 1 &> 0 \end{aligned}$$

  Die letzte Ungleichung ist für alle $n \geq 2$ eine wahre Aussage.

- Die Folge c_n ist eine Nullfolge:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3-3}} = \frac{\frac{1}{n^{3/4}}}{\sqrt[4]{1-\frac{3}{n^3}}} \to \frac{0}{\sqrt[3]{1-0}} = 0 \text{ für } n \to \infty$$

Insgesamt wurde also gezeigt: Die Folge c_n ist eine monoton gegen Null strebende Folge. Aus dem Konvergenzkriterium von Leibniz folgt daher, dass die alternierende Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3-3}}$$

konvergiert.

b) Sei wieder $c_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3-3}}$. Es gilt die folgende Abschätzung

$$c_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3-3}} \geq \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$. Daher ist laut Minorantenkriterium die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n c_n$ nicht absolut konvergent.

c) 2 alternative Lösungswege

- Aus der geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

  folgt mit $\frac{1}{f(u)} = -\frac{1-u^3}{1-u}$ durch Vergleich

$$f(u) = -\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{2} u^k} = -\frac{1}{1+u+u^2}$$

  wobei der Nenner ein Polynom darstellt, das bei 1 keine Nullstelle besitzt (rationale Funktion ist somit an u=1 stetig). Speziell gilt $f(1) = -\frac{1}{3}$.

- Wir betrachten $\frac{1}{f(u)} = -\frac{1-u^3}{1-u}$. Da 1 eine Nullstelle des Zähler- und Nennerpolynoms darstellt, erhält man durch Polynomdivision das Polynom $\frac{1}{f}(u) = -(u^2+u+1) \Leftrightarrow f(u) = -\frac{1}{(u^2+u+1)}$ mit $f(1) = -\frac{1}{3}$.