Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2009/10

# ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

## 3. Test (MO, 30.11.2009) / Gruppe weiß *( mit Lösung )*

---

a) *[ 3 Punkte ]*

Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) \;=\; \frac{x+r}{x^2+r^2-2\,r\,x}$$

| $f(x) \;=$ |
|---|

b) *[ 3 Punkte ]* [1]

Sei $g(x) := \ln(f(x))$ mit $f(x)$ aus a). Wie lautet der Definitionsbereich $D$ von $g(x)$ in Abhängigkeit von $r$? Formen Sie den Ausdruck für $g(x)$ so um, dass keine Division und keine Potenz mehr vorkommt. (Vorsicht beim Umformen des quadratischen Termes!)

| $D \;=$ | $g(x) \;=$ |
|---|---|

c) *[ vgl. b); 2 Extra-Punkte ]*

Für welche Werte des Parameters $r$ ist der Definitionsbereich $D$ aus b) ein (ggf. unbeschränktes) Intervall? (Begründung!) Geben Sie $D$ an. Liegt in diesem Fall am linken Rand eine hebbare Unstetigkeit vor? (J/N; Begründung!)

| $r \;\in$ | $D \;=$ | hebbar (J/N): |
|---|---|---|

$\longrightarrow$

[1] Aufgabe b) ist unabhängig von a) lösbar.

**LÖSUNG**

a) Der Nenner $x^2 + r^2 - 2\,rx = (x-r)^2$ hat die doppelte Nullstelle $x = r$. Ansatz:

$$f(x) \;=\; \frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} \;=\; \frac{A_1\,(x-r) + A_2}{(x-r)^2} \;=\; \frac{A_1\,x + (A_2 - A_1 r)}{(x-r)^2}$$

$\Rightarrow\;\; A_1 = 1,\;\; A_2 - A_1 r = r \quad\Rightarrow$

$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{1}{x-r} + \frac{2\,r}{(x-r)^2}}$$

b) Das Argument $\frac{x+r}{(x-r)^2}$ von $\ln(\cdot)$ muss wohldefiniert sein, also in $(0,\infty)$ liegen. $\Rightarrow$

$$D \;=\; \{x \in \mathbb{R} :\; x > -r \;\wedge\; x \neq r\} \;=\; \boxed{(-r,\infty) \setminus \{r\}}$$

Umformen von $g(x) = \ln(\frac{x+r}{(x-r)^2})$ ergibt für $x \in D$ (Achtung: Betrag!):

$$\boxed{g(x) \;=\; \ln(x+r) - 2\,\ln(|x-r|)}$$

c) Aus b) folgt: $D$ ein (unbeschränktes Intervall für

$$\boxed{r \le 0\,; \qquad D \;=\; (-r,\infty) = (|r|,\infty)\,; \qquad \text{hebbar: N}}$$

Beachte: $\lim\limits_{x\downarrow -r} g(x) \;=\; -\infty$ (ln an der Stelle 0).

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger



**ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)**

**3. Test (MO, 30.11.2009) / Gruppe bunt** *(mit Lösung)*

---

a) *[3 Punkte]*

Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$u(x) = \frac{c-x}{4\,cx + (x-c)^2}$$

| $u(x) =$ |
|---|

b) *[3 Punkte]* [1]

Sei $v(x) := \ln(\frac{1}{u(x)})$ mit $u(x)$ aus a). Wie lautet der Definitionsbereich $D$ von $v(x)$ in Abhängigkeit von $c$? Formen Sie den Ausdruck für $v(x)$ so um, dass keine Division und keine Potenz mehr vorkommt. (Vorsicht beim Umformen des quadratischen Termes!)

| $D =$ | $v(x) =$ |
|---|---|

c) *[vgl. b); 2 Extra-Punkte]*

Für welche Werte des Parameters $c$ ist der Definitionsbereich $D$ aus b) ein (ggf. unbeschränktes) Intervall? (Begründung!) Geben Sie $D$ an. Liegt in diesem Fall am rechten Rand eine hebbare Unstetigkeit vor? (J/N; Begründung!)

| $c \in$ | $D =$ | hebbar (J/N): |
|---|---|---|

$\longrightarrow$

[1] Aufgabe b) ist unabhängig von a) lösbar.

**LÖSUNG**

a) Der Nenner $4\,cx + (x-c)^2 = (x+c)^2$ hat die doppelte Nullstelle $x = -c$. Ansatz:

$$u(x) \;=\; \frac{A_1}{x+c} + \frac{A_2}{(x+c)^2} \;=\; \frac{A_1\,(x+c) + A_2}{(x+c)^2} \;=\; \frac{A_1\,x + (A_2 + A_1 c)}{(x+c)^2}$$

$\Rightarrow\;\; A_1 = -1,\;\; A_2 + A_1 c = c \;\;\Rightarrow$

$$\boxed{u(x) \;=\; -\,\frac{1}{x+c} + \frac{2\,c}{(x+c)^2}}$$

b) Das Argument $\frac{(x+c)^2}{c-x}$ von $\ln(\cdot)$ muss wohldefiniert sein, also in $(0,\infty)$ liegen. $\Rightarrow$

$$D \;=\; \{x \in \mathbb{R} :\; x < c \;\wedge\; x \neq -c\} \;=\; \boxed{(-\infty, c) \setminus \{-c\}}$$

Umformen von $v(x) = \ln(\frac{(x+c)^2}{c-x})$ ergibt für $x \in D$ (Achtung: Betrag!):

$$\boxed{v(x) \;=\; 2\,\ln(|x+c|) - \ln(c-x)}$$

c) Aus b) folgt: $D$ zusammenhängend für

$$\boxed{c \leq 0\,; \qquad D \;=\; (-\infty, c)\,; \qquad \text{hebbar: N}}$$

Beachte: $\lim\limits_{x\uparrow c} v(x) \;=\; -\,\infty$ (ln an der Stelle 0).