Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2009/10

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

4. Test (MO, 18.1.2010) / Gruppe weiß *(mit Lösung)*

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) \;=\; x\ln(x^b), \qquad x>0,\quad b\in\mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0+} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) \;=$ *[2 P.]*

b) An welcher Stelle x_0 hat die Funktion $f(x)$ die Steigung $f'(x_0)=3b$? Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an dieser Stelle x_0 an.

$x_0 =$ Tangente an x_0: *[2.5 P.]*

c) Gegeben ist die Funktion

$$g(x) \;=\; \frac{x^2}{\cos(ax)-1}, \qquad a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) \;=$ *[1.5 P.]*

LÖSUNG

a) $f(x) = bx\ln(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = b\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = b\lim_{x\to 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -b\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

b) $f'(x) = b\ln x + bx\frac{1}{x} = b\ln x + b$

$b\ln x_0 + b = 3b$
$\Leftrightarrow \ln x_0 = 2 \qquad \Rightarrow x_0 = e^2$

$f(x_0) = 2be^2$
$k = 3b$

$y = kx + d$
$d = y - kx = 2be^2 - 3be^2 = -be^2$
$\Rightarrow y = 3bx - be^2$

c)

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos(ax)-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{-a\sin(ax)} = -\frac{2}{a}\lim_{x\to 0}\frac{1}{a\cos(ax)} = -\frac{2}{a^2}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2009/10

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

4. Test (MO, 18.1.2010) / Gruppe bunt *(mit Lösung)*

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) \;=\; x^a \ln x, \qquad x > 0, \;\; a \in \mathbb{N}$$

a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0+} f(x)$.

$\boxed{\lim_{x\to 0+} f(x) \;=\; \qquad}$ *[2 P.]*

b) An welcher Stelle x_0 hat die Funktion $f(x)$ die Steigung $f'(x_0) = 0$?
Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an dieser Stelle x_0 an.

$\boxed{x_0 = \qquad\qquad \text{Tangente an } x_0:\qquad\qquad}$ *[2.5 P.]*

c) Gegeben ist die Funktion

$$g(x) \;=\; \frac{1-\cosh(bx)}{x^2}\,, \qquad b \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} g(x)$.

$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) \;=\; \qquad}$ *[1.5 P.]*

LÖSUNG

a) $f(x) = x^a \ln(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^a}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{a}{x^{a+1}}} = -\frac{1}{a} \lim_{x\to 0^+} x^a = 0$$

b) $f'(x) = a x^{a-1} \ln x + x^a \frac{1}{x} = a x^{a-1} \ln x + x^{a-1}$

$x^{a-1}\,(a \ln x + 1) = 0$
$\Rightarrow a \ln x = -1 \qquad \Rightarrow x_0 = e^{-\frac{1}{a}} \qquad x_0 = 0$ nicht möglich, da $x > 0$

$f(x_0) = -\frac{1}{ea}$
$k = 0$

$y = kx + d$
$d = y - kx = -\frac{1}{ea} - 0 = -\frac{1}{ea}$
$\Rightarrow y = -\frac{1}{ea}$

c)

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh(bx)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-b\sinh(bx)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-b^2\cosh(bx)}{2} = -\frac{b^2}{2}$$