Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2010/11

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Haupttest (FR, 14.01.2011) / Gruppe weiß (mit Lösung)

$\longrightarrow$

• **Aufgabe 1.** Gegeben sei die von $x \in \mathbb{R}$ abhängige Reihe [1]

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{n}{n+1}(x-2)^n$$

a) *[1.5 P.]* Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, so dass die Reihe $S(x)$ absolut konvergiert.

$$\boxed{S(x) \text{ absolut konvergent für } x \in \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

b) *[2 P.]* Geben Sie für den Fall der absoluten Konvergenz unter a) eine Abschätzung folgender Gestalt an. Wie lauten a und b?

$$\boxed{|S(x)| \leq \left|\frac{x-a}{x-b}\right|; \quad a = \qquad\qquad b = \qquad\qquad}$$

Hinweis: Fallunterscheidung bezüglich x.

c) *[2.5 P.]* Für welche Werte von x ist die Reihe

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)\, a_{n+1} - n\, a_n \right), \quad a_n \text{ wie oben}$$

konvergent (Begründung!), und wie lautet Ihr Wert?

$$\boxed{T(x) \text{ konvergent für } x \in \qquad\qquad\qquad \text{Wert: } T(x) = \qquad\qquad}$$

LÖSUNG

a) Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}(x-2)\right| \to q < 1 \quad \text{für} \quad |x-2| < 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S(x) \text{ absolut konvergent für } x \in (1,3)}$$

(Für $x = 1$ und $x = 3$ ist $|x-2| = 1$, mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right|$ divergent.)

b) Geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$, mit $q = |x-2| < 1$, ist konvergente Majorante. Daraus folgt

$$\boxed{|S(x)| \leq \frac{q}{1-q} \leq \left|\frac{x-a}{x-b}\right| \quad \text{mit} \quad a = 2 \quad \text{und} \quad b = 1 \ (x \in (1,2]), \quad b = 3 \ (x \in [2,3))}$$

c) Teleskopreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$, mit

$$b_n = n\, a_n = \frac{n^2}{n+1}(x-2)^n, \quad \text{ergibt Nullfolge für } |x-2| < 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T(x) \text{ konvergent für } x \in (1,3) \qquad \text{Wert: } T(x) = -b_1 = 1 - \frac{x}{2}}$$

[1] Startindex: $n = 1$ (nicht $n = 0$))

- **Aufgabe 2.**

a) *[2.5 P.]* Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) \;=\; \frac{x^2 - 5\,x + 4}{x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6}$$

PBZ von $f(x)$:

b) *[1 P.]* Konstruieren Sie eine rationale Funktion $f(x)$ der Gestalt $f(x) = \dfrac{a + b\,x}{1 + c\,x}$ mit der Eigenschaft $f(0) = 1$ und $f'(1) = 0$. Ist die Lösung $f(x)$ eindeutig festgelegt?

c) *[2.5 P.]* Gegeben sei die rationale Funktion

$$g(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1}\,.$$

Zeigen Sie: $g(x)$ ist auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton. Fertigen Sie eine Skizze an und geben Sie möglichst große Teilmengen $D_i \subseteq \mathbb{R}$ an, auf denen $g\colon D_i \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv ist. Geben Sie auch die Bilder $g(D_i)$ an.

d) *[max. 3 Extra-P.]* Fortsetzung von c): Geben Sie denjenigen Zweig der Umkehrfunktion von $g(x)$ explizit an, dessen Definitionsbereich die Stelle $x = 0$ enthält.

Hinweis: Rein formal ergeben sich mehrere Lösungskandidaten für $x = g^{-1}(y)$. Überlegen Sie, welcher der richtige ist.

LÖSUNG

a) Nenner: $x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$; $x = 1$ ist auch Nullstelle des Zählers: $x^2 - 5\,x + 4 = (x-1)(x-4) \quad \Rightarrow$

$$\frac{x^2 - 5\,x + 4}{x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6} \;=\; \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} \;=\; \textit{[Ansatz:]} \;=\; \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

Rechnung ergibt $A = 2$, $B = -1$, also

PBZ von $f(x)$: $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x-3}$

b) Die Forderung $1 = f(0) = a$ ergibt $a = 1$. Also:

$$f(x) \;=\; \frac{1 + b\,x}{1 + c\,x}, \quad \text{mit} \quad f'(x) \;=\; \frac{b - c}{(1 + c\,x)^2}$$

Die Forderung $f'(1) = 0$ ergibt $c = b$. Also:

$$f(x) \;=\; \frac{1 + b\,x}{1 + b\,x} \;\equiv\; 1 \quad \text{eindeutig festgelegt.}$$

c) Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Auf D ist $g(x) = -\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$ differenzierbar, mit

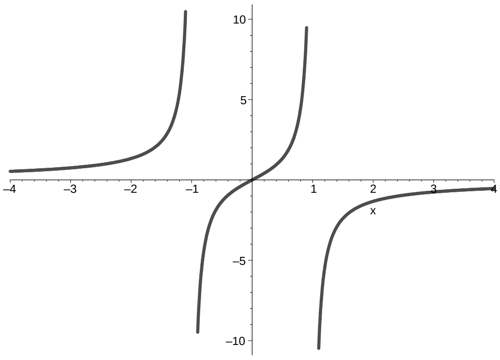
$$g'(x) \;=\; \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \;>\; 0 \quad \text{für alle } x \in D,$$

also streng monoton wachsend,[2] und somit injektiv auf

$D_1 = (-\infty, -1),\ g(D_1) = (0, \infty);\quad D_2 = (-1, 1),\ g(D_2) = (-\infty, \infty);\quad D_3 = (1, \infty),\ g(D_3) = (-\infty, 0)$

[2] D.h. streng monoton wachsend auf jedem der D_i. g ist aber nicht ‘global’ monoton auf D – siehe Skizze.

$$f(x) \;=\; \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \;=\; \frac{2\,x}{1-x^2}$$



d) Umkehrfunktionen des Zweiges $R\colon\, (-1,1) \to \mathbb{R}:$

Zu berechnen ist $x \in (-1,1)$ als Lösung von $g(x) = y \in \mathbb{R}$. Die Gleichung $g(x) = y$ ist äquivalent zu

$$g(x) \;=\; \frac{2\,x}{1-x^2} \;=\; y \qquad \Leftrightarrow \qquad y\,x^2 + 2\,x\, - y \;=\; 0,$$

mit Lösung $x = g^{-1}(y)$, gegeben durch

$$x = 0 \;\text{ für }\; y = 0, \qquad x \;=\; \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{y} \;\text{ für }\; y \neq 0$$

mit $x \in (-1,1)$. (Beachte auch $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+y^2}-1}{y} = 0$ — muss ja gelten wegen Stetigkeit.)

Anmerkung: Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung, $x = -\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}$, liegt nicht in $(-1,1)$ und ist unbeschränkt an $x = 0$. (Sie entspricht den anderen Zweigen.)

- **Aufgabe 3.**

a) *[3.5 P.]* Beweisen Sie $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, indem Sie von $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ausgehen.

b) *[2.5 P.]* Die Lösung der Differentialgleichung $u''(x)+\alpha^2\,u(x) = \cos(\beta\,x)$ mit $u(0) = u'(0) = 0$ lautet

$$u(x) \;=\; \frac{\cos(\alpha\,x)-\cos(\beta\,x)}{\beta^2-\alpha^2}\,.$$

Denken Sie sich $\alpha \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben und berechnen Sie $\lim\limits_{\beta\to\alpha} u(x)$.

$$\boxed{\lim_{\beta\to\alpha} u(x) \;=\; \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

c) *[max. 3 Extra-P.]* Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x > 1$ mit $\dfrac{x^{n+1}}{x-1} \;<\; (n+1)\,e\,.$

$$\boxed{x \;=\; \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Hinweis: Differenzieren.

LÖSUNG

a) Mit $f(x) = \arcsin x$, $f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ und $g(y) = f^{-1}(y) = \sin y$ ist

$$g'(y) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \;=\; \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-f^{-1}(y)^2}}} \;=\; \sqrt{1-(\sin y)^2} \;=\; \cos y$$

b) de l'Hospital bezüglich der Variablen β:

$$\lim_{\beta\to\alpha} u(x) \;=\; \lim_{\beta\to\alpha}\frac{\cos(\alpha\,x)-\cos(\beta\,x)}{\beta^2-\alpha^2} \;=\; \lim_{\beta\to\alpha}\frac{x\,\sin(\beta\,x)}{2\,\beta}$$

Also:

$$\boxed{\lim_{\beta\to\alpha} u(x) \;=\; \frac{x\sin(\alpha x)}{2\,\alpha}}$$

c) Die Ableitung von $f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{x-1}$,

$$f'(x) \;=\; \frac{(n+1)\,x^n\,(x-1)-x^{n+1}}{(x-1)^2}$$

verschwindet für $(n+1)(x-1)-x = 0$, also für

$$\boxed{x \;=\; 1+\frac{1}{n}}$$

Hier gilt

$$f(x) \;=\; f(1+\tfrac{1}{n}) \;=\; \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{{}^1\!/_n} \;=\; n\,(1+\tfrac{1}{n})\,(1+\tfrac{1}{n})^n \;=\; (n+1)\,(1+\tfrac{1}{n})^n \;<\; (n+1)\,e\,.$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2010/11

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Haupttest (FR, 14.01.2011) / Gruppe bunt (mit Lösung)

$\longrightarrow$

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei die von $c \in \mathbb{R}$ abhängige Reihe

$$R(c) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{k-1}{k+1}(3-c)^k$$

a) *[1.5 P.]* Bestimmen Sie die Menge aller $c \in \mathbb{R}$, so dass die Reihe $R(c)$ absolut konvergiert.

$$\boxed{R(c) \text{ absolut konvergent für } c \in \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

b) *[2 P.]* Geben Sie für den Fall der absoluten Konvergenz unter a) eine Abschätzung folgender Gestalt an. Wie lautet der Wert von x in der Abschätzung?

$$\boxed{|R(c)| \le \frac{1}{x}; \qquad x = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Hinweis: Fallunterscheidung bezüglich c.

c) *[2.5 P.]* Für welche Werte von c ist die Reihe[1]

$$T(c) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(k^2 a_k - (k+1)^2 a_{k+1} \right), \quad a_k \text{ wie oben}$$

konvergent (Begründung!), und wie lautet Ihr Wert?

$$\boxed{T(c) \text{ konvergent für } c \in \qquad\qquad\qquad \text{Wert: } T(c) = \qquad\qquad}$$

LÖSUNG

a) Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{k(k+1)}{(k-1)(k+2)}(3-c)\right| \to q < 1 \quad \text{für} \quad |3-c| < 1$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{R(c) \text{ absolut konvergent für } c \in (2,4)}$$

(Für $c = 2$ und $c = 4$ ist $|3-c| = 1$, mit $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{k-1}{k+1}\right|$ divergent.)

b) Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$, mit $q = |c-3| < 1$, ist konvergente Majorante. Daraus folgt

$$\boxed{|R(c)| \le \frac{1}{1-q} \le \frac{1}{x} \quad \text{mit} \quad x = c-2 \;\; (c \in (2,3]), \quad x = 4-c \;\; (c \in [3,4))}$$

c) Teleskopreihe $\sum_{k=2}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$, mit

$$b_k = k^2 a_k = \frac{k^2(k-1)}{k+1}(3-c)^k, \quad \text{ergibt Nullfolge für } |c-3| < 1$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{T(c) \text{ konvergent für } c \in (2,4) \qquad \text{Wert: } T(c) = b_2 = \frac{4}{3}(3-c)^2}$$

[1] Startindex: $k = 2$ (nicht $k = 0$))

- **Aufgabe 2.**

  a) *[2.5 P.]* Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(x) \;=\; \frac{4\,x^2 - 12\,x + 8}{x^3 - 3\,x^2 - x + 3}$$

PBZ von $f(x)$:

  b) *[1 P.]* Konstruieren Sie eine rationale Funktion $g(x)$ der Gestalt $g(x) = \dfrac{1 + a\,x}{c + d\,x}$ mit der Eigenschaft $g(0) = 1$ und $g'(0) = 0$. Ist die Lösung $g(x)$ eindeutig festgelegt?

  c) *[2.5 P.]* Gegeben sei die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\,.$$

  Zeigen Sie: $f(x)$ ist auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton. Fertigen Sie eine Skizze an und geben Sie möglichst große Teilmengen $D_i \subseteq \mathbb{R}$ an, auf denen $f\colon D_i \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv ist. Geben Sie auch die Bilder $f(D_i)$ an.

  d) *[max. 3 Extra-P.]* Fortsetzung von c): Geben Sie denjenigen Zweig der Umkehrfunktion von $f(x)$ explizit an, dessen Definitionsbereich die Stelle $x = 0$ enthält.

  Hinweis: Rein formal ergeben sich mehrere Lösungskandidaten für $x = f^{-1}(y)$. Überlegen Sie, welcher der richtige ist.

LÖSUNG

a) Nenner: $x^3 - 3\,x^2 - x + 3 \;=\; (x-1)(x+1)(x-3)$; $x = 1$ ist auch Nullstelle des Zählers: $4\,x^2 - 12\,x + 8 = 4(x-1)(x-2) \quad \Rightarrow$

$$\frac{4\,x^2 - 12\,x + 8}{x^3 - 3\,x^2 - x + 3} \;=\; \frac{4(x-2)}{(x+1)(x-3)} \;=\; \textit{[Ansatz:]} \;=\; \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$

Rechnung ergibt $A = 3$, $B = 1$, also

PBZ von $f(x)$: $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{x-3}$

b) Die Forderung $1 = g(0) = 1/c$ ergibt $c = 1$. Also:

$$g(x) \;=\; \frac{1 + a\,x}{1 + d\,x}, \quad \text{mit} \quad g'(x) \;=\; \frac{a - d}{(1 + d\,x)^2}$$

Die Forderung $g'(0) = 0$ ergibt $d = a$. Also:

$$g(x) \;=\; \frac{1 + a\,x}{1 + a\,x} \;\equiv\; 1 \quad \text{eindeutig festgelegt.}$$

c) Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Auf D ist $f(x)$ differenzierbar, mit

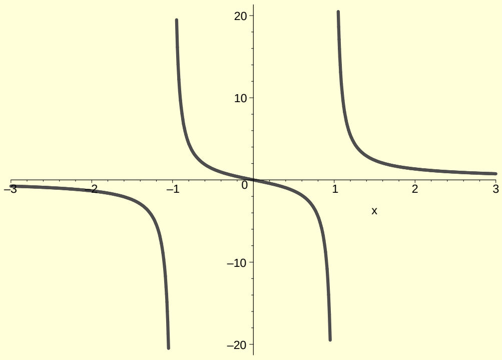
$$f'(x) \;=\; -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \;<\; 0 \quad \text{für alle } x \in D,$$

also streng monoton fallend,[2] und somit injektiv auf

$D_1 = (-\infty, -1)$, $f(D_1) = (-\infty, 0)$; $D_2 = (-1, 1)$, $f(D_2) = (-\infty, \infty)$; $D_3 = (1, \infty)$, $f(D_3) = (0, \infty)$

[2] D.h. streng monoton fallend auf jedem der D_i. f ist aber nicht 'global' monoton auf D – siehe Skizze.

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \;=\; \frac{2\,x}{x^2-1}$$



d) Umkehrfunktionen des Zweiges $R\colon\ (-1,1) \to \mathbb{R}:$

Zu berechnen ist $x \in (-1,1)$ als Lösung von $f(x) = y \in \mathbb{R}$. Die Gleichung $f(x) = y$ ist äquivalent zu

$$f(x) \;=\; \frac{2\,x}{x^2-1} \;=\; y \quad \Leftrightarrow \quad y\,x^2 - 2\,x - y \;=\; 0,$$

mit Lösung $x = f^{-1}(y)$, gegeben durch

$$x = 0 \;\text{ für }\; y = 0, \qquad x \;=\; \frac{1-\sqrt{1+y^2}}{y} \;\text{ für }\; y \neq 0$$

mit $x \in (-1,1)$. (Beachte auch $\lim\limits_{y\to 0} \frac{1-\sqrt{1+y^2}}{y} = 0$ — muss ja gelten wegen Stetigkeit.)

Anmerkung: Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung, $x = \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}$, liegt nicht in $(-1,1)$ und ist unbeschränkt an $x = 0$. (Sie entspricht den anderen Zweigen.)

- **Aufgabe 3.**

a) *[2.5 P.]* Betrachten Sie die Funktion

$$v(x) \;=\; \frac{\sin(b\,x) - \sin(c\,x)}{(b+c)(b-c)}\,.$$

Denken Sie sich $c \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben und berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{b\to c} v(x)$.

$$\boxed{\lim_{b\to c} v(x) \;=\; \qquad\qquad\qquad}$$

b) *[3.5 P.]* Zeigen Sie, dass $1/(\cos x)^2$ die Ableitung von $\tan x$ ist, und zwar unter Zurückführung auf die Identität $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.

c) *[max. 3 Extra-P.]* Zeigen Sie: Für alle $2 \leq n \in \mathbb{N}$ existiert ein $u > 0$ mit $\frac{(1+u)^n}{n\,u} < e$.

$$\boxed{u \;=\; \qquad\qquad}$$

Hinweis: Differenzieren.

LÖSUNG

a) de l'Hospital bezüglich der Variablen b:

$$\lim_{b\to c} v(x) \;=\; \lim_{b\to c}\frac{\sin(b\,x)-\sin(c\,x)}{b^2-c^2} \;=\; \lim_{b\to c}\frac{x\,\cos(b\,x)}{2\,b}$$

Also:

$$\boxed{\lim_{\beta\to\alpha} v(x) \;=\; \frac{x\cos(c\,x)}{2\,c}}$$

b) Mit $f(x) = \arctan x$, $f'(x) = 1/(1+x^2)$ und $g(y) = f^{-1}(y) = \tan y$ ist

$$g'(y) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \;=\; \frac{1}{\frac{1}{1+f^{-1}(y)^2}} \;=\; 1+(\tan y)^2 \;=\; \frac{1}{(\cos y)^2}\,.$$

c) Die Ableitung von $f(u) = \dfrac{(1+u)^n}{n\,u}$,

$$f'(u) \;=\; \frac{n\,(1+u)^{n-1}\,u - (1+u)^n}{n\,u^2}$$

verschwindet für $n\,u - (1+u) = 0$, also für [3]

$$\boxed{u \;=\; \frac{1}{n-1}}$$

Hier gilt

$$f(u) \;=\; \frac{(1+u)^n}{n\,u} \;=\; \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{n\,\frac{1}{n-1}} \;=\; \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \;=\; \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \;<\; e\,.$$

---

[3] $n = 1$ ist Sonderfall, mit $f(u) \downarrow 1$ für $u \to \infty$.