Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2010/11

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Nachtest (4. März 2011) *(mit Lösung)*

$\longrightarrow$

- **Aufgabe 1.** *[6 Punkte]*

  a) *[2.5 P]* Untersuchen Sie die Reihe auf

  i) Konvergenz:

  ii) absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

  b) *[1.5 P]* Untersuchen Sie Reihe auf Konvergenz: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}}$

  c) *[2 P]* Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

LÖSUNG

a) i) Hier liegt eine alternierende Reihe vor, daher ist das Leibniz-Kriterium anwendbar:

- $|a_n|$ ist eine Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 0$$

- $|a_n|$ ist monoton fallend:

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Daraus folgt die Konvergenz der Reihe.

ii) Die Reihe ist jedoch nicht absolut konvergent, wie folgende Abschätzung mit Hilfe des Minorantenkriteriums zeigt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

Für die harmonische Reihe wurde die Divergenz in der Vorlesung bereits gezeigt. Daraus folgt, dass die ursprüngliche Reihe nicht absolut kovergent ist.

b) Wir wenden das Quotientenkriterium an und erhalten mit der Definition des Binomialkoeffizienten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!}{(2(n+1))!\,3^n n!\,n!} = \frac{3(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}$$

In Grenzwertform ($n \to \infty$) ergibt sich der Wert $\frac{3}{4} < 1$. Daher ist die Reihe konvergent.

c) Anschreiben der ersten Glieder zeigt die Struktur einer Teleskopreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- **Aufgabe 2.** *[6 Punkte]*

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) *[2 P]* $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$ b) *[2 P]* $\displaystyle\int \frac{1-x^4+x}{1+x^2} \, dx$ c) *[2 P]* $\displaystyle\int_{-4}^{+4} \sqrt{16-x^2} \, dx$

Hinweis zu c): $(\cos u)^2 = \frac{1+\cos(2u)}{2}$ bzw. $(\sin u)^2 = \frac{1-\cos(2u)}{2}$

LÖSUNG

a) Zweimalige partielle Integration liefert:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2\left[x e^x - \int e^x \, dx\right] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

b) $$\int \frac{1-x^4+x}{1+x^2} \, dx = \int \frac{1-x^4}{1+x^2} \, dx + \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \int \frac{(1-x^2)\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{1+x^2}} \, dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= [\,\text{Substitution } 1+x^2 = u \ \to] = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

c) Unter Verwendung der Substitution $x = 4\sin u \ \to \ dx = 4\cos u \, du$ lässt sich das Integral in folgender Weise berechnen:

$$\int_{-4}^{+4} \sqrt{16-x^2} \, dx = 2\int_0^4 \sqrt{16-x^2} \, dx = 8\int_0^{\pi/2} \sqrt{16-16(\sin u)^2} \cos u \, du =$$

$$= 32\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(\sin u)^2} \cos u \, du = 32\int_0^{\pi/2} (\cos u)^2 \, du = 32\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2u)}{2} \, du =$$

$$16\left[u + \frac{\sin(2u)}{2}\right]_0^{\pi/2} = 16\,\frac{\pi}{2} = 8\pi$$

Es handelt sich beim Ergebnis um die halbe Fläche des Kreises mit Radius $r = 4$:

$x^2 + y^2 = 16 \ \to \ y = \pm\sqrt{16-x^2}$.

- **Aufgabe 3.** *[6 Punkte]*

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$$

unter Berücksichtigung folgender Aspekte durch: Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Polstellen, asymptotisches Verhalten: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, Extrema (Maxima und Minima), Wendepunkte und Sattelpunkte; Skizze.

LÖSUNG

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$, da sowohl $y = x^2$ als auch $y = e^{-\frac{x}{2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

Wertebereich: $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_0^+$

Nullstellen: Da $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, liegen Nullstellen nur beim Verschwinden des Faktors x^2 vor, also liegt die einzige Nullstelle bei $x = 0$.

Polstellen: Es gibt keine Polstellen.

asymptotisches Verhalten: Da die Exponentialfunktion für $x \to \pm\infty$ s stärker wächst als jedes Polynom, bestimmt sie das Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Extrema: $f'(x) = (\frac{1}{4}x^2 - 2x + 2)e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow f'(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 4$

$f''(x) = (-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - 3)e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow f''(0) = 2 > 0$ Minimum und $f''(4) = -2e^{-2} < 0$ Maximum

Wendepunkte und Sattelpunkte: $f''(x) = (-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - 3)e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow f''(x) = 0$ für $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$
Es existieren keine Sattelpunkte.