Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2010/11

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Test (MO, 8.11.2010) / Gruppe weiß *(mit Lösung)*

- Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$, definiert durch $a_n := \dfrac{c^2+n}{n+1} - c \quad (n \in \mathbb{N})$.

  Dabei ist $c \in \mathbb{R}$ fest, aber beliebig. Begründen Sie Ihre Antworten:

  a) *[4 Punkte]* Für welche Werte von c ist die Folge $\{a_n\}$
     - streng monoton wachsend, bzw.
     - streng monoton fallend ?

  b) *[2 Punkte]* Wie lautet der Wert von $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

LÖSUNG

a) Streng monton wachsend bedeutet

$$a_{n+1} > a_n \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{c^2+n+1}{n+2} > \frac{c^2+n}{n+1} \quad \Leftrightarrow \ \ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 < 1$$

Hieraus folgt, dass die Folge für $|c| < 1$ streng monoton wachsend ist. Analog sieht man dass sie für $|c| > 1$ streng monoton fallend ist. Für $|c| = 1$ ergibt sich eine konstante Folge.

b)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{c^2}{n}+1}{1+\frac{1}{n}} - c = 1 - c$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

A N A L Y S I S   I   F Ü R   T P H,   UE (103.088)

1. Test (MO, 8.11.2010) / Gruppe bunt *(mit Lösung)*

- Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$, definiert durch $a_n := b^2 + \dfrac{1+b\,n}{n+b}$ $(n \in \mathbb{N})$.

  Dabei ist $b \geq 0$ fest, aber beliebig. Begründen Sie Ihre Antworten:

  a) *[4 Punkte]* Für welche Werte von b ist die Folge $\{a_n\}$
  - streng monoton wachsend, bzw.
  - streng monoton fallend ?

  b) *[2 Punkte]* Wie lautet der Wert von $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

LÖSUNG

a) Streng monton wachsend bedeutet

$$a_{n+1} > a_n \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1+b(n+1)}{(n+1)+b} > \frac{1+b\,n}{n+b} \quad \Leftrightarrow \ \ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad b > 1$$

Hieraus folgt, dass die Folge für $b > 1$ streng monoton wachsend ist. Analog sieht man dass sie für $0 \leq b < 1$ streng monoton fallend ist. Für $b = 1$ ergibt sich eine konstante Folge.

b)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(b^2 + \frac{1+b\,n}{n+b}\right) = b^2 + \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+b}{1+\frac{b}{n}} = b^2 + b$$