Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2010/2011

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, UE (103.088)

2. Test (MO, 29.11.2010) / Gruppe weiss *(mit Lösung)*

---

1) *[1.5 Punkte]* Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ und das zugehörige Bild der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 1}$$

2) *[1.5 Punkte]* Wie muss der Parameter $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die folgende Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ stetig ist?

$$D = [-2, 2] \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x^2+x-6} & \text{für } x \neq 2 \\ c & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

3) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die Umkehrfunktion der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{für } \ x \geq 1 \\ 4x - 2x^2 - 1 & \text{für } \ x < 1 \end{cases}$$

LÖSUNG

1) Für $x \in D$ muss gelten $x^2 - 4x + 1 \geq 0$.

Wir berechnen die Nullstellen von $x^2 - 4x + 1 = 0$ und erhalten $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Folglich lautet der Definitionsbereich:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2 - \sqrt{3} \vee x \geq 2 + \sqrt{3}\}$$

Das Bild der Funktion ist offensichtlich $\mathbb{R}_0^+$.

2) Für die Stetigkeit der Funktion muss gelten:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{3}{5} = c$$

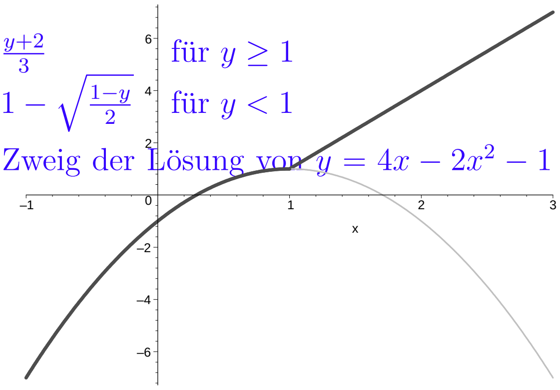
3) Anmerkung: $h(x)$ ist stetig. Zur Berechnung der Umkehrfunktion $h^{-1}(y)$ lösen wir die beiden bijektiven Zweige

$$y = h(x) = 3x - 2\colon\ [1, \infty) \to [1, \infty) \qquad \text{bzw.} \qquad y = h(x) = 4x - 2x^2 - 1\colon\ (-\infty, 1) \to (-\infty, 1)$$

nach x auf und erhalten:

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y+2}{3} & \text{für } y \geq 1 \\ 1 - \sqrt{\frac{1-y}{2}} & \text{für } y < 1 \end{cases}$$

Anmerkung: Für $y < 1$ ist also der linke Zweig der Lösung von $y = 4x - 2x^2 - 1$ zu nehmen (siehe Skizze).



Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2010/2011

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, UE (103.088)

2. Test (MO, 29.11.2010) / Gruppe bunt *(mit Lösung)*

---

1) *[1.5 Punkte]* Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ und das zugehörige Bild der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$$

2) *[1.5 Punkte]* Wie muss der Parameter $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die folgende Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ stetig ist?

$$D = [-1, 1] \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} & \text{für } x \neq 1 \\ c & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

3) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die Umkehrfunktion der Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{für } \ x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{für } \ x < 1 \end{cases}$$

LÖSUNG

1) Für $x \in D$ muss gelten $x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

Wir berechnen die Nullstellen von $x^2 - 2x + 1 = 0$ und erhalten $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Folglich lautet der Definitionsbereich:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 - \sqrt{2} \vee x \geq 1 + \sqrt{2}\}$$

Das Bild der Funktion ist offensichtlich $\mathbb{R}_0^+$.

2) Für die Stetigkeit der Funktion muss gelten:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \frac{4}{3} = c$$

3) Anmerkung: $h(x)$ ist stetig. Zur Berechnung der Umkehrfunktion $h^{-1}(y)$ lösen wir die beiden bijektiven Zweige

$$y = h(x) = x^2 - 2x + 2\colon\ [1, \infty) \to [1, \infty) \qquad \text{bzw.} \qquad y = h(x) = 2x - 1\colon\ (-\infty, 1) \to (-\infty, 1)$$

nach x auf und erhalten:

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} 1 + \sqrt{y-1} & \text{für } y \geq 1 \\ \frac{y+1}{2} & \text{für } y < 1 \end{cases}$$

Anmerkung: Für $y \geq 1$ ist also der rechte Zweig der Lösung von $y = x^2 - 2x + 2$ zu nehmen (siehe Skizze).