Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2010/11

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, UE (103.088)

3. Test (MO, 20.12.2010) / Gruppe weiss *(mit Lösung)*

---

a) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die Grenzwerte

(i) $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x^2)}{x\sin x} = \qquad}$ (ii) $\boxed{\lim_{u\to\infty} \dfrac{\ln(u^2+c^2)}{\ln(u+c)} = \qquad}$ $(c \in \mathbb{R})$

Hinweis: $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.

b) *[3 Punkte]* Um wie viele cm^3 ändert sich das Volumen $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ des von Klara am Christkindlmarkt entwendeten kugelförmigen roten Luftballons mit Radius R cm, wenn Klara ihn so aufbläst, dass sich seine Oberfläche $F = 4\pi R^2$ in einem kleinen Ausmaß von $\Delta F = \varepsilon^2\,\mathrm{cm}^2$ vergrößert? Geben Sie das Ergebnis als Ausdruck in Abhängigkeit vom Radius R und von ε an.

(Dies ist mittels Differenzieren herzuleiten; betrachte V als Funktion von F. Ein anderer Lösungsweg wird nicht akzeptiert.)

$$\boxed{\text{Änderung des Volumens:} \quad \Delta V = \qquad\qquad \mathrm{cm}^3}$$

c) *[2 Extra-Punkte]* Wie lautet die Formel für die n-te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) einer Funktion der Bauart $f(x) = x^2\,g(x)$? Drücken Sie die Antwort mittels höherer Ableitungen von g aus.

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

LÖSUNG

a) (i) 2x de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^2)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x}{1+x^4}}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2(1+x^4)-2x\,4x^3}{(1+x^4)^2}}{\cos x\,+\,\cos x - x\sin x} = 1$$

(ii) 1x de l'Hospital:

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\ln(u^2+c^2)}{\ln(u+c)} = \lim_{u\to\infty}\frac{\dfrac{2u}{u^2+c^2}}{\dfrac{1}{u+c}} = \lim_{u\to\infty}\frac{2u(u+c)}{u^2+c^2} = \lim_{u\to\infty}\frac{2+\dfrac{2c}{u}}{1+\dfrac{c^2}{u^2}} = 2$$

b) Stelle V als Funktion von F dar. Zunächst $R = R(F)$:

$$F = 4\pi R^2 \quad\Rightarrow\quad R = \sqrt{\frac{F}{4\pi}} = \frac{F^{1/2}}{2\pi^{1/2}}$$

$\Rightarrow$

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}\,\frac{F^{3/2}}{8\pi^{3/2}} = \frac{F^{3/2}}{6\pi^{1/2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{dV}{dF} = \frac{\frac{3}{2}F^{1/2}}{6\pi^{\frac{1}{2}}} = \frac{F^{1/2}}{4\pi^{\frac{1}{2}}} = \frac{R}{2}\,,\ \text{ d.h. }\ dV = \frac{R}{2}\,dF$$

Daher gilt bei kleiner Änderung der Oberfläche im Ausmaß von $\Delta F = \varepsilon^2\,\text{cm}^2$ in erster Näherung für die Änderung ΔV des Volumens:

$$\Delta V \approx \frac{R}{2}\Delta F = \frac{\varepsilon^2 R}{2}\,\text{cm}^3$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 g(x)\\ f'(x) &= 2x\,g(x) + x^2\,g'(x)\\ f''(x) &= 2\,g(x) + 4\,x\,g'(x) + x^2\,g''(x)\\ f'''(x) &= 6\,g'(x) + 6\,x\,g''(x) + x^2 g'''(x) \end{aligned}$$

usw; besser gleich allgemein mit der *Leibniz-Formel*:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}x^2\cdot\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}f(x)\\ &= \binom{n}{0}x^2\,g^{(n)}(x) + \binom{n}{1}2\,x\,g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}2\,g^{(n-2)}(x) + 0\\ &= x^2\,g^{(n)}(x) + 2\,n\,x\,g^{(n-1)}(x) + n(n-1)\,g^{(n-2)}(x) \end{aligned}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)
3. Test (MO, 20.12.2010) / Gruppe bunt *(mit Lösung)*

---

a) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die Grenzwerte

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{x\ln(1+x)} =$

(ii) $\lim_{y\to\infty} \dfrac{\ln y - \dfrac{1}{y}}{\ln y - \ln\dfrac{1}{y}} =$

b) *[3 Punkte]* Um wieviele mm ändert sich der Umfang $U = 2\pi r$ meiner kreisförmigen Bremsscheibe hinten links, mit Radius r mm, wenn sie aufgrund der herrschenden Kälte derart schrumpft, dass sich ihr Flächeninhalt $F = \pi r^2$ in einem kleinen Ausmaß von $\Delta F = -\varepsilon^2\,\text{mm}^2$ reduziert? Geben Sie das Ergebnis als Ausdruck in Abhängigkeit vom Radius r und von ε an.

(Dies ist mittels Differenzieren herzuleiten; betrachte U als Funktion von F. Ein anderer Lösungsweg wird nicht akzeptiert.)

Änderung des Umfanges: $\Delta U =$ mm

c) *[2 Extra-Punkte]* Wie lautet die Formel für die n-te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) der Funktion $f(x) = x\,e^{cx}$ ($c \in \mathbb{R}$)?

$f^{(n)}(x) =$

LÖSUNG

a) (i) 2x de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)\, 2x}{\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\,x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2)}{\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(1+x)-x}{(1+x)^2}} = 1$$

(ii) 1x de l'Hospital:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\ln y - \dfrac{1}{y}}{\ln y - \ln\dfrac{1}{y}} = \lim_{y\to\infty} \frac{\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{2}{y}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1 + \dfrac{1}{y}}{2} = \frac{1}{2}$$

b) Stelle U als Funktion von F dar. Zunächst $r = r(F)$:

$$F = \pi\, r^2 \quad\Rightarrow\quad r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = \frac{F^{1/2}}{\pi^{1/2}}$$

$\Rightarrow$

$$U = 2\pi\, r = 2\,\pi^{1/2}\, F^{1/2} \quad\Rightarrow\quad \frac{dU}{dF} = \pi^{1/2}\, F^{-1/2} = \frac{1}{r}, \quad \text{d.h.} \quad dU = \frac{1}{r}\, dF$$

Daher gilt bei kleiner Änderung des Flächeninhaltes im Ausmaß von $\Delta F = -\varepsilon^2\,\mathrm{mm}^2$ in erster Näherung für die Änderung ΔU des Umfanges:

$$\Delta U = \frac{1}{r}\,\Delta F = -\frac{\varepsilon^2}{r}\,\mathrm{mm}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= x\, e^{cx} \\ f'(x) &= e^{cx} + cx\, e^{cx} \\ f''(x) &= 2\,c\, e^{cx} + c^2 x\, e^{cx} \\ f'''(x) &= 3\,c^2\, e^{cx} + c^3 x\, e^{cx} \end{aligned}$$

usw; besser gleich allgemein mit der *Leibniz-Formel*:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}\, x \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\, e^{cx} \\ &= c^n x\, e^{cx} + n\, c^{n-1}\, e^{cx} = c^{n-1}(cx+n)\, e^{cx} \end{aligned}$$