Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2010/11

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

4. Test (MO, 24.1.2011) / Gruppe weiß *(mit Lösung)*

---

1) *[6 Punkte]* Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) *[2 P.]* $\displaystyle\int e^{bu}\cos u\,du$ b) *[1 P.]* $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\sin u)^5\cos u\,du$ c) *[3 P.]* $\displaystyle\int \ln(1-x^2)\,dx$

Hinweis zu c): partielle Integration; $\frac{d}{dx}\text{artanh}\;x = \frac{1}{1-x^2}$.

LÖSUNG

a) Zweimalige partielle Integration liefert:

$$\int e^{bu}\cos u\,du = \frac{e^{bu}}{b}\cos u + \frac{e^{bu}}{b^2}\sin u - \frac{1}{b^2}\int e^{bu}\cos u\,du$$

Daraus folgt:

$$(1+\tfrac{1}{b^2})\int e^{bu}\cos u\,du = \frac{e^{bu}}{b^2}(b\cos u+\sin u)$$

$$\int e^{bu}\cos u\,du = \frac{e^{bu}}{1+b^2}(b\cos u+\sin u)+C$$

b) Durch Substitution von $\sin u = t \quad (\cos u\,du = dt)$ erhält man:

$$\int_0^{\pi/2}(\sin u)^5\cos u\,du = -\int_0^1 t^5\,dt = \frac{1}{6}$$

c) $$\int \ln(1-x^2)\,dx = x\ln(1-x^2) - 2\int\frac{-x^2}{1-x^2}\,dx = x\ln(1-x^2) - 2\int\frac{-x^2+1-1}{1-x^2}\,dx =$$

$$= x\ln(1-x^2) - 2\int(1-\frac{1}{1-x^2})\,dx = x\ln(1-x^2) - 2(x-\text{artanh}\;x)+C$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2010/11

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

4. Test (MO, 24.1.2011) / Gruppe bunt *(mit Lösung)*

---

1) *[6 Punkte]* Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) *[3 P.]* $\int \ln(u^2+1)\,du$ b) *[1 P.]* $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^5 \sin x\,dx$ c) *[2 P.]* $\int \sin x\, e^{ax}\,dx$

Hinweis zu a): partielle Integration; $\frac{d}{du}\arctan u = \frac{1}{u^2+1}$.

LÖSUNG

a) $$\int \ln(u^2+1)\,du = u\ln(u^2+1) - 2\int \frac{u^2}{u^2+1}\,du =$$
$$= u\ln(u^2+1) - 2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}\,du =$$
$$= u\ln(u^2+1) - 2\int (1-\frac{1}{u^2+1})\,du = u\ln(u^2+1) - 2(u-\arctan u) + C$$

b) Durch Substitution von $\cos x = u \quad (-\sin x\,dx = du)$ erhält man:
$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^5 \sin x\,dx = -\int_1^0 u^5\,du = \frac{1}{6}$$

c) Zweimalige partielle Integration liefert:
$$\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sin x - \frac{e^{ax}}{a^2}\cos x - \frac{1}{a^2}\int e^{ax}\sin x\,dx$$
Daraus folgt:
$$(1+\tfrac{1}{a^2})\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(a\sin x - \cos x)$$
$$\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{e^{ax}}{1+a^2}(a\sin x - \cos x) + C$$