**1.** Aufgabensammlung / 1.1.2

**2.** (*) Aufgabensammlung / 1.2.2

**3.** Aufgabensammlung / 1.2.4

**4.** Aufgabensammlung / 1.2.11

**5.** Aufgabensammlung / 1.2.13

**6.** Aufgabensammlung / 1.4.2

**7.** Aufgabensammlung / 1.4.4

**8.** Berechnen Sie mittels des binomischen Lehrsatzes die folgenden Summen für $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k \, 3^{n-k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$

**9.** Seien $A, B, C$ Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

b) $(A \cup B) \times C = (A \cup C) \times (B \cup C)$

c) $(A \setminus B) \cap C = A \setminus (B \cap C)$

**10.** Ein Anwendungsproblem:

Für zwei in Serie bzw. parallel geschaltete elektrische Widerstände $R_1$ und $R_2$ ergibt sich der Gesamtwiderstand

$$R_{ges} = R_1 + R_2 \quad \text{(bei Serienschaltung)}, \qquad R_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad \text{(bei Parallelschaltung)}.$$

Zeigen Sie, dass die analogen Formeln für $n \geq 2$ in Serie bzw. parallel geschaltete Widerstände wie folgt lauten:

$$R_{ges} = \sum_{i=1}^{n} R_i \quad \text{(bei Serienschaltung)}, \qquad R_{ges} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \quad \text{(bei Parallelschaltung)}.$$

(*) : höherer Schwierigkeitsgrad (kein typisches Testbeispiel)

**1.** Untersuchen Sie die Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$, auf Injektivität und Surjektivität.

**2.** Aufgabensammlung / 2.2.4

**3.** Aufgabensammlung / 3.1.2

**4.** (*) Aufgabensammlung / 3.2.2 $(A \subseteq \mathbb{R})$

*Hinweis:* Für $x \in A^C$ gilt lt. Vor. insbesondere $x \notin \partial A$. Schließen Sie weiter (siehe Def. 3.14–3.16).

**5.** Aufgabensammlung / 3.2.7

**6.** Aufgabensammlung / 4.1.4

**7.** Aufgabensammlung / 4.1.7

**8.** Eine Folge kann auch rekursiv definiert sein, z.B.:

$$a_1 := 0; \qquad a_n := \frac{1}{2 - a_{n-1}} \quad \text{für} \;\; n \geq 2.$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge beschränkt ist; konkret: $a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Zeigen Sie mit Hilfe von a): Die Folge ist streng monoton wachsend.
c) Nach Satz 4.8 ist die Folge daher konvergent. Wie lautet ihr Grenzwert?
d) Können Sie die $a_n$ explizit angeben?

*Hinweis zu c):* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$.

*Hinweis zu d):* Stellen Sie aufgrund der Verhaltens der ersten Folgenglieder eine Vermutung auf und beweisen Sie diese mittels Induktion.

**9.** Ein Testbeispiel (Kurztest 1 aus WS 2009/10):

*Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$, definiert durch $a_n := (2n-3)/(2+3n)$ $(n \in \mathbb{N})$.*

*a) Zeigen Sie, dass $\{a_n\}$ streng monoton wachsend ist.*
*b) Zeigen Sie, dass $\{a_n\}$ beschränkt ist.*

Bestimmen Sie auch den Grenzwert der Folge.

**10.** (*) Ein Anwendungsproblem: *Logistisches Wachstum.*

Es bezeichne $p_n$ die Größe einer Population (z.B. Schädlinge in einem Wald, Bakterien in einer Kultur, ...) zum 'Zeitpunkt' $n \in \mathbb{N}$. Die nachstehend rekursiv definierte *logistische Folge* ist ein einfaches mathematisches Modell für das Wachstum einer Population:

$$p_0 \text{ vorgegeben (Anfangszustand);} \qquad p_n := f(p_{n-1})p_{n-1} \quad \text{für} \;\; n \geq 1,$$

mit $f(p) = 1 + k(S-p)$. Dabei sei $S > 0$, $0 < k < 1/S$ und $0 < p_0 < S$. ($k$ ist ein Wachstumsparameter, und $S$ beschreibt einen Sättigungswert.)

Die 'rein geometrische Folge' $p_n := (1+k)\,p_{n-1}$ würde (monoton, exponentiell) wachsen, mit $p_n = (1+k)^n p_0$ unbeschränkt für $n \to \infty$. Auf Grund des zusätzlichen Faktors $(S - p_{n-1})$ wird dieses Wachstum bei der logistischen Folge jedoch immer langsamer, wenn sich die $p_n$ dem Wert $S$ von unten her annähern. Dies beschreibt ein abgeschwächtes Wachstum aufgrund limitierter Ressourcen (zu wenig Futter für so viele Viecher). Wir studieren das Verhalten jetzt genauer:

a) Zeigen Sie, dass die Folge beschränkt ist; konkret: $p_n < S$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Zeigen Sie mit Hilfe von a): Die Folge ist streng monoton wachsend.
c) Nach Satz 4.8 ist die Folge daher konvergent. Wie lautet ihr Grenzwert?

*Hinweis zu a):* Leiten Sie eine Rekursion für die Folge $(S - p_n)$ her und argumentieren Sie induktiv.

*Hinweis zu b):* Betrachten Sie den Quotienten $p_n/p_{n-1}$.

*Hinweis zu c):* vgl. Aufgabe 8.

(*) : höherer Schwierigkeitsgrad (kein typisches Testbeispiel); eine kleine Herausforderung.

1. Ein Testbeispiel (Kurztest 2 aus WS 2009/2010)

   a) *Untersuchen Sie die unendliche Reihe*

   $$\sum_{k=2}^{\infty} b_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[4]{k^3 - 3}}$$

   *auf Konvergenz.*

   b) *Untersuchen Sie die gegebene Reihe auf absolute Konvergenz.*

   c) *Die folgende Funktion ist an der Stelle* $u = 1$ *nicht wohldefiniert:*

   $$f(u) := \frac{1-u}{u^3 - 1}$$

   *Setzen Sie den Wert von* $f(1)$ *so fest, dass* $f$ *an* $u = 1$ *stetig ist (Begründung angeben).*

2. Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{k^2 - 1}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k}(-3)^{k+1}5^{-2k}$

3. Aufgabensammlung / 5.2.1

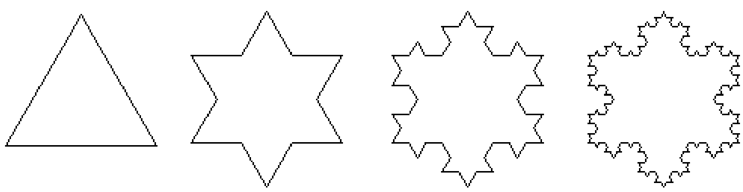
4. Aufgabensammlung / 5.2.6

5. Aufgabensammlung / 5.2.9

6. Aufgabensammlung / 5.3.1

7. Ein Anwendungsproblem: *Koch'sche Flockenkurve − ein fraktales geometrisches Objekt*

   Jedes Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $s > 0$ wird in drei gleich lange Teile zerlegt. Der mittlere Teil bildet jeweils die Grundseite eines darauf errichteten gleichseitigen Dreiecks. Dieser Prozess wird jeweils mit allen neu enstanden Seiten wiederholt.

   Zu Beginn, also für $n = 0$ ist der Umfang $U_0 = 3s$ und die Fläche $F_0 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$.

   Geben Sie die Folge $U_n, n \in \mathbb{N}$ an und berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} U_n$.

   Geben Sie die Reihe zur Berechnung der Fläche $F_n, n \in \mathbb{N}$ an und berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} F_n$.

   **Bemerkung:** Im Grenzfall wird eine endliche Fläche von einem unendlichen Umfang begrenzt!

8. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die folgenden Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R}$ sind:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1 & \text{für } x < a \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{für } x \geq a \end{cases}$ Skizzieren Sie die entstehenden Funktionen.

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \left(\frac{1}{2} - a^2\right) x - 4a + \frac{3}{2} & \text{für } -1 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & \text{sonst} \end{cases}$

9. Aufgabensammlung / 6.2.9

10. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$$

   (a) Zeigen Sie die Stetigkeit von $f$ an $x = 0$ mit Hilfe des $\varepsilon$-$\delta$-Kriteriums.
   Geben Sie ein passendes $\delta$ an für $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

   (b) Zeigen Sie die Stetigkeit von $f$ an $x = 0$ mit Hilfe der Charakterisierung durch Folgen.

**1.** Aufgabensammlung / 6.2.3

**2.** Aufgabensammlung / 6.2.14

**3.** Fortsetzung von Aufgabe 2:

Gesucht ist eine Lösung $x = \zeta$ der Gleichung $x^3 + 4x - 1 = 0$ in $[0,1]$. Dies ist äquivalent zu Lösung der 'Fixpunktgleichung'

$$x = f(x), \qquad f\colon\ [0,1] \to [0,1]: \quad f(x) = \frac{1-x^3}{4}, \quad f \text{ stetig.}$$

(a) Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon\ [0,1] \to [0,1]$ ist *kontrahierend*, d.h. sie besitzt eine Lipschitz-konstante $L < 1$. (Siehe Hinweis zu Aufgabe 8.)

(b) Aufgrund von Aufgabe 2 existiert ein Fixpunkt $\zeta \in [0,1]$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a): Es gibt nur ein derartiges $\zeta \in [0,1]$, d.h. der Fixpunkt ist eindeutig.

Man kann $\zeta$ iterativ approximieren: Ausgehend von einem Startwert $x_0 \in [0,1]$ berechnet man

$$x_{i+1} := f(x_i), \quad i = 0,1,2,\ldots\,.$$

Diese 'Fixpunktiteration' erzeugt eine Folge $(x_i)$, die gegen die Lösung $\zeta$ konvergiert (umso schneller je kleiner $L$). Führen Sie für das gegebene Beispiel einige Schritte dieser Iteration am Rechner aus, z.B. ausgehend von $x_0 := \frac{1}{2}$.

*Anmerkung:* Die exakte Lösung ist $\zeta = \frac{c}{6} - \frac{8}{c}$ mit $c = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{849}}$; $\zeta \approx 0.246266\ldots$

**4.** Aufgabensammlung / 6.2.15

**5.** Funktionen können auch implizit definiert sein, d.h. als Lösung einer parameterabhängigen Gleichung. Betrachten Sie die Gleichung

$$\frac{y-1}{x+1} = 1 - xy$$

für die Unbekannte $y$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$. Durch ihre Lösung ist eine Funktion $y = f(x)$ definiert. Wie lautet diese? Ist sie wohldefiniert und stetig für alle $x \in \mathbb{R}$?

Besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = -1$. Was ist $f(-1)$?

**6.** (*) Funktionen können auch in rekursiver Weise definiert sein. Betrachten Sie $f:\ [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ f(\frac{x}{2}), & x > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion wohldefiniert ist. Wo ist sie stetig, und wie lauten die Unstetigkeitsstellen und ihr Typ? Skizzieren Sie auch den Graphen von $f$.

**7.** Aufgabensammlung / 6.3.7

**8.** (*) Zeigen Sie: Jedes Monom $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist Lipschitz-stetig auf $[a, b]$. Geben Sie auch eine Lipschitzkonstante $L$ in Abhängigkeit von $a, b$ an.

Verwenden Sie diese Aussage dazu, um zu zeigen, dass jedes Polynom auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ (nicht nur gleichmäßig stetig) sondern sogar Lipschitz-stetig ist.

*Hinweis:* Überlegen Sie zunächst

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{\,dings}\, y^{bums}; \qquad dings,\ bums = ?$$

**9.** Geben Sie die beiden Zweige der Umkehrfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

an. Wie lauten die Definitionsbereiche der beiden Zweige? Skizzieren Sie die beiden Umkehrfunktionen.

Anmerkung: Man kann auch sagen, dass eine Umkehrfunktion (bzw. jeder Zweig) durch die gegebene Funktion in impliziter Weise definiert ist (vgl. Aufgabe 6).

**10.** Ein Anwendungsproblem:

Ein Wanderer W geht von A nach B entlang eines Weges und benötigt dafür 5 Stunden. Nach der Mittagspause geht er wieder zurück. Gibt es (mindestens) einen Ort auf der Strecke, den W sowohl auf dem Hinweg als auch auf dem Rückweg nach derselben Gehzeit $T$ erreicht?

Anmerkung: Die Gehgeschwindigkeit wird nicht als konstant angenommen; sie kann also mit der Gehzeit variieren; nur die Gesamtzeit (genau 5 Stunden) ist jeweils vorgegeben.

Zusatzfrage I: Stimmt die Lösung auch, wenn es erlaubt ist, das der Wanderer zwischendurch eine Rast einlegt oder sogar ein Stück Richtung A bzw. B zurückgeht?

Zusatzfrage II: Unter welcher Annahme an das Gehverhalten von W ist die Lösung $T$ eindeutig?

1. Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren $(x-a)(x-b)(x-c)$:
   (a) $x^3 + x^2 - 10x + 8$
   (b) $x^3 - (2+r)x^2 + (1+2r)x - r, \quad r \in \mathbb{R}$

   *Hinweis:* 'Erraten' sie jeweils eine der Nullstellen.

2. Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen:
   (a) $\dfrac{3x-3}{x^2+x-2}$ (b) $\dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2\,(x+2)}$
   (c) $\dfrac{3x^2-3x+1}{(x^2-2x+2)(x-1)}$ (d) $\dfrac{1}{(x^2+2x+2)^2\,(x-1)}$

3. Geben Sie den korrekten Ansatz für die reelle und die komplexe Partialbruchzerlegung folgender Funktionen an:
   (a) $\dfrac{x^2-6x+9}{(x-3)^5}$ (b) $\dfrac{x}{(x^4+10x^2+25)^2\,(x^2+4x+3)^3\,(x+1)}$

4. (a) Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass
   $$f(x) = a\cos x + b\sin x$$
   in der Form
   $$f(x) = A\sin(x-\varphi) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = A\cos(x-\psi)$$
   mit passenden $A \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. Geben Sie explizit an, wie die *Amplitude* $A$ und die *Phasenverschiebung* $\varphi$ bzw. $\psi$ mit $a$ und $b$ zusammenhängen.
   (b) Zeigen Sie, dass die Werte der Funktionen $\tan x$ und $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ tatsächlich der Darstellung aus Abbildung 8.10 im Skriptum entsprechen.

   *Hinweis:* Ähnliche Dreiecke.

5. Aufgabensammlung / 7.2.1

6. Aufgabensammlung / 8.1.13

7. Aufgabensammlung / 8.2.5

8. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:
   (a) $\log_{1/5}(8) - \log_5\left(\frac{1}{8}\right)$
   (b) $\log_{10^m}(10^n)$, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$
   (c) $\log_{b_2}(b_1) \cdot \log_{b_3}(b_2) \cdot \ldots \cdot \log_{b_n}(b_{n-1}) \cdot \log_{b_1}(b_n)$, wobei $b_k \in (0,\infty) \setminus \{1\}$

9. Anwendungsprobleme:
   (a) Der Zerfall radioaktiver Substanzen wird durch ein Zerfallsgesetz der Gestalt $N(t) = N_0\,e^{\lambda t}$ beschrieben. $N_0$ bedeutet die Anzahl der Atome zur Zeit $t=0$ und $N(t)$ die Anzahl der Atome zu einem bestimmten Zeitpunkt $t$. Die Konstante $\lambda < 0$ determiniert die Geschwindigkeit des radioaktiven Zerfalls. Die Halbwertzeit (*half life period*) ist jene Zeit, nach der die Hälfte von $N_0$ zerfallen ist.

   Nach welcher Zeit sind 90 % der Atome des radioaktiven Natriumisotops $^{24}$Na zerfallen und wie lautet der entsprechende Wert von $\lambda$? (Die Halbwertzeit für $^{24}$Na beträgt ca. 14.96 Stunden.)
   (b) Licht, das in eine Schicht aus Glas eintritt, wird in exponentieller Weise abgeschwächt (Absorption), d.h. es gilt ein Abschwächungsgesetz analog zum Zerfallsgesetz aus (a). Für ein konkretes Material (Glas) wird gemessen, dass die Intensität des Lichtes pro zurückgelegtem Millimeter um 1 % abnimmt. Um welchen Faktor wird dann die Intensität des Lichtes durch eine 5 cm dicke Glasscheibe abgeschwächt? Welche Werte haben die diesem Material entsprechende 'Halbwertzeit' und der Abklingparameter $\lambda$?

10. Geben Sie die Gestalt der Ableitung von Funktionen des folgenden Typs an:
    (a) $f(x) = e^{\lambda x} g(x); \quad f(x) = e^{\lambda g(x)} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
    (b) $f(x) = (g \circ \cos)(x) = g(\cos x); \quad f(x) = (\cos \circ g)(x) = \cos(g(x))$
    (c) $f(x) = g(x) \cdot g(-\frac{1}{x}) \quad (x \neq 0)$

    Dabei ist $g$ eine beliebige differenzierbare Funktion, und die Lösung wird mit Hilfe ihrer Ableitung $g'$ ausgedrückt.

1. Aufgabensammlung / 9.1.2

2. Die Funktion $f(x) = \arctan {}^1\!/_x$ ist an der Stelle $x = 0$ unstetig, sie ist dort jedoch links- und rechtsseitig stetig (warum?).

   Lässt sich ihre Ableitung an $x = 0$ stetig fortsetzen? Wie lautet dann der Wert $f'(0)$ ?

   *Anmerkung:* Die richtige Antwort erscheint zunächst paradox. Machen Sie eine Skizze.

3. Aufgabensammlung / 9.1.10 a (*), b

4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die kleinstmögliche Lipschitzkonstante folgender Funktionen:
   (a) $f\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad f(x) = \arctan x$.
   (b) $f\colon (0, \infty) \to (0, \frac{\pi}{2}), \quad f(x) = \arctan {}^1\!/_x$
   (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = g^{-1}(x)$, wobei $g'(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ (also $g$ streng monoton).
   Funktioniert das? Falls nein $-$ wie muss man die Voraussetzung an $g$ modifizieren, damit $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist?

5. Aufgabensammlung / 9.1.17

6. Aufgabensammlung / 9.3.4

7. Die binäre `double`-Gleitpunktarithemetik eines handelsüblichen Computers entspricht einer relativen Genauigkeit von ca. 16 Dezimalstellen. Ist $x \in \mathbb{R}$ (nicht allzu klein, allzu groß) und $\tilde{x}$ die nächstgelegene Gleitpunktzahl, so gilt daher für den relativen Approximationsfehler (Rundungsfehler) [1]

   $$\Big|\frac{\tilde{x} - x}{x}\Big| \le \varepsilon \approx 10^{-16}, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{x} = x\,(1 + \varepsilon).$$

   Will man nun z.B. $f(x) = \exp(x) = e^x$ auswerten, so 'sieht' der Computer nur den gerundeten Wert $\tilde{x}$ und wertet $\exp(\tilde{x})$ aus.

   Wie groß darf $x > 0$ maximal sein, so dass bei exakter Auswertung von $\exp(\tilde{x})$ wenigstens die halbe Anzahl der Dezimalstellen im Ergebnis richtig sind, d.h.

   $$\Big|\frac{\exp(\tilde{x}) - \exp(x)}{\exp(x)}\Big| \le \delta \approx 10^{-8} \quad - \quad ?$$

   *Hinweis:* Verwenden Sie die Ableitung der Exponentialfunktion (der relative Datenfehler $\varepsilon$ ist sehr klein).

   Anmerkung: Im Extremfall, nämlich falls die Auswertung von $f(\tilde{x})$ von $f(x)$ signifikant abweicht (z.B. derart, dass alle 16 Dezimalziffern von $f(x)$ und $f(\tilde{x})$ unterschiedlich sind), ist die Auswertung eigentlich sinnlos: Man sieht nur Zufallszahlen, weil die Rundung ein zufälliger Prozess ist. Man spricht dann von einem 'schlecht konditionierten' Problem: extreme Empfindlichkeit des Funktionswertes auf verfälschte Daten. [2]

8. Aufgabensammlung / 9.5.1

9. Unter welchen Voraussetzungen an die Funktion $f(x)$ existieren die Grenzwerte

   $$\text{(a)} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

   Wie lautet dann jeweils der Grenzwert?

10. Gleiche Frage wie in Aufgabe 9, für

   $$\text{(a)} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} - f'(x)}{h} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h} - f'(x)}{h}$$

   und

   $$\text{(c)} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x-h)}{h} - f'(x)}{h^2} \qquad\qquad \text{(d)} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h} - f'(x)}{h^2}$$

   Haben Sie eine Interpretation der Ergebnisse anzubieten? (Man denke an eine numerische Approximation des Ableitungswertes $f'(x)$ durch einen Differenzenquotienten mit geeignet kleinem $h$, wobei Funktionswerte $f(x)$, $f(x \pm h)$ verwendet werden.)

[1] Nur in dem Sonderfall, dass $x$ am Rechner exakt darstellbar ist, gilt $\varepsilon = 0$.

[2] ($\exp(\tilde{x})$ lässt sich auch nicht exakt auswerten, sondern wird am Rechner intern approximiert. Diesen Auswertefehler vernachlässigen wir hier, er ist auch für die vorliegende Fragestellung ziemlich irrelevant.

1. Aufgabensammlung / 10.1.3

2. Konstruieren Sie eine (möglichst einfach gebaute) rationale Funktion $R(x)$ mit einem Pol 2. Ordnung an $x = 1$ (sonst keine Pole), einem Wendepunkt ($f''(x) = 0$) an der Stelle $x = 4$, einer doppelten Nullstelle (irgendwo), und der Eigenschaft $\lim_{x\to\infty} = 2$. Checken Sie Ihre Lösung daraufhin, ob $x = 4$ tatsächlich ein Wendepunkt ist.

   *Hinweis:* Ansatz in Form der Partialbruchzerlegung.

3. Zwei Personen tragen eine dünne, nicht verbiegbare Stange durch einen Gang von $a$ m Breite. Sie kommen an eine Ecke (90°), und ums Eck ist der Gang $b$ m breit. Wie lang darf die Stange höchstens sein, damit die Stangenträger nicht steckenbleiben?

   *Anmerkung:* Wir betrachten das Problem im $\mathbb{R}^2$, d.h. alles spielt sich in einer Ebene ab.

4. [ Prüfungsbeispiel vom 17.12.2010 ] Führen Sie für die Funktion $f(x) = x - \ln(1-x^2)$ eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch.

   *Hinweis:* Argumentieren Sie, dass es genau zwei Nullstellen geben muss. Eine der beiden lässt sich jedoch nicht exakt analytisch bestimmen. Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um sie numerisch zu approximieren.

5. Das Beispiel aus der Thermodynamik (Skriptum S. 159) ist relativ knapp formuliert und wurde in der Vorlesung nicht genauer besprochen. Denken Sie es durch: Was ist die genaue Problemstellung? Vollziehen Sie die Lösung im Detail nach.

   *Anmerkung:* $V$ = spezifisches Volumen des Gases.

6. Ein Tunnelquerschnitt wird beschrieben durch die Funktion $y = f(x) = \sqrt{1-x^4}$ ($x \in [-1,1]$; Höhe 1; $y = 0$ entspricht dem Straßenniveau). Durch den Tunnel fahren Lastwagen (Querschnitt rechteckig) mit irgendeiner Breite $b < 2$ und Höhe $h < 1$. Wie können $h$ und $b$ gewählt werden, so dass die Querschnittsfläche $F = b\,h$ maximal wird unter der Bedingung dass sich das – schluck! – gerade noch ausgeht? (Der Tunnel ist eine Einbahn.)

7. Geben Sie die Gestalt der Newton-Iteration für folgende Problemstellungen an. Spielen Sie auch je ein numerisches Beispiel am Rechner durch.

   (i) Ein divisionsfreier Divisionsalgorithmus:
   Zu berechnen ist $x := 1/a$ für gegebenes $a \neq 0$. Wählen Sie eine Funktion $f(x) = f(x;a)$ so, dass $x = 1/a$ zur Lösung von $f(x) = 0$ äquivalent ist, und so dass für die Durchführung der Newton-Iteration nur Additionen/Subtraktionen und Multiplikationen benötigt werden.

   (ii) Zu approximieren ist $\arcsin x$ für $x \in (-1,1)$ mittels Newton-Iteration, wobei neben den elementaren arithmetischen Operationen nur die Winkelfunktionen sin, cos verwendet werden sollen.

8. (*) Falls sich für einen Integranden $f(x)$ die Stammfunktion nicht exakt analytisch angeben lässt, greift man zur Approximation des bestimmten Integrals $I(f;a,b) := \int_a^b f(x)\,dx$ auf numerische Verfahren zurück. Diese beruhen auf der Auswertung einer Art Riemann-Summe, bzw. verfeinerten Varianten davon, mit endlicher Schrittweite $\Delta x_i$ (konstant oder variabel).

   Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ und $\Delta x_i \equiv h = (b-a)/n$, d.h. das Intervall $[a,b]$ wird in $n$ Teilintervalle der Länge $h$ zerlegt. Sei $x_i := ih$, $i = 0 \ldots n$ ($x_0 = a$, $x_n = b$). Die zwei einfachsten Approximationsverfahren ('Quadraturverfahren') sind:

   (R) Rechtecksumme: $I(f;a,b) \approx R(f;a,b,h) := \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

(T) Trapezsumme: $I(f;a,b) \approx T(f;a,b,h) := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\,\Delta x_i = h \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$

Man kann auch schreiben: $T(f;a,b,h) = h\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right]$.

Wir betrachten zunächst nur ein Teilintervall $[x_i, x_i{+}h]$. Die entsprechenden ‘lokalen’ Approximationen sind

$$\text{(R)} \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx h f(x_i)\,, \qquad\qquad \text{(T)} \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx h\,\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

Studieren Sie die Abhängigkeit der entsprechenden (lokalen) Approximationsfehler von $f$ und von $h$, unter verschiedenen Annahmen an $f$ ([Lipschitz]-stetig, 1x oder sogar 2x stetig differenzierbar). Folgern Sie daraus Abschätzungen für den Fehler der Rechtecksumme und der Trapezsumme unter diesen Annahmen.

*Anmerkung:* $n \to \infty$ für $h \to 0$.

9. Fortsetzung von Aufgabe 8: Wie lautet die Rechtecksumme für $[a,b]=[0,1]$, $f(x)=x^3$? Drücken Sie diese in $n = 1/h$ aus und zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} R(f,\,0,\,1,\,1/n) = \frac{1}{4} \quad (= \text{exakter Integralwert}).$$

10. Fortsetzung von Aufgabe 8: *Fehlerschätzung.*

Angenommen, wir kennen den Wert des Integrals $I(f;a,b)$ nicht, wir wollen jedoch den Approximationsfehler für eine konkret am Computer berechnete Näherungslösung schätzen. Wir überlegen wie folgt:

Unter geeigneten Annahmen an $f$ gilt in erster Näherung (dies folgt im wesentlichen aus der Lösung von Aufgabe 8):

$$R(f;a,b,h) - I(f;a,b) \approx C_1\,h, \qquad T(f;a,b,h) - I(f;a,b) \approx C_2\,h^2,$$

für hinreichend kleines $h$, mit gewissen von $f$ abhängigen (aber von $h$ unabhängigen) Konstanten $C_1$ und $C_2$. Nehmen Sie jetzt an dass, für die Fehler sogar gilt[1]

$$R(f;a,b,h) - I(f;a,b) = C_1\,h, \qquad T(f;a,b,h) - I(f;a,b) = C_2\,h^2. \tag{X}$$

Die Fehlerkonstanten $C_1$, $C_2$ kann man im allgemeinen nicht explizit angeben. Um den Approximationsfehler zu schätzen, gehen wir anders vor: Wir berechnen am Computer $R(f;a,b,h)$ und $R(f;a,b,\frac{h}{2})$ bzw. $T(f;a,b,h)$ und $T(f;a,b,\frac{h}{2})$. Aus dieser Information erhält man, durch Ausnützung von (X), eine konkrete numerische Schätzung für den Fehler $R(f;a,b,h) - I(f;a,b)$ bzw. $T(f;a,b,h) - I(f;a,b)$. Diese Schätzmethode bezeichnet man auch als *Extrapolation.*

Zeigen Sie, wie das funktioniert. Interessant wäre auch eine Implementierung am Rechner und Testen anhand eines Beispiels.

[1] De facto vernachlässigen wir dabei Fehleranteile höherer Ordnung in $h$.

1. Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sin x$.

   (a) Bestimmen Sie die Obersumme[1] $O_n = O(f, T_n)$ und die Untersumme $U_n = U(f, T_n)$ von $f$ zur Zerlegung $T_n$, die entsteht, wenn $[0,\pi/2]$ in $n$ gleich große Teilintervalle zerlegt wird.

   (b) Zeigen Sie explizit, dass $O_n - U_n \to 0$ für $n \to \infty$.

   *Hinweis:* Teleskopreihe.

2. Aufgabensammlung / 12.1.2

   *Hinweis:* Fallunterscheidung beim Integranden.

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{6}{5}\sqrt[5]{x} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$ (b) $\displaystyle\int_2^{1+e} \frac{dx}{x-1}$

4. Berechnen Sie mittels partieller Integration:

   (a) $\displaystyle\int e^{ax}\sin x\, dx, \quad a \neq 0$ (b) $\displaystyle\int (\cos x)^2\, dx$

5. Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion von:

   (a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^4 + 6\,x^2 + 25}$ (c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^3}$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3(1 + x^2)}$

   *Anmerkung:* Lösen Sie (a) ohne Verwendung der Partialbruchzerlegung.

6. Berechnen Sie folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3\cos x + 5}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - x^4}$

7. Man betrachte das 'Fourier-Integral'

$$I_n := \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\, dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

   Dabei sei $f(x)$ eine mindestens $k$ mal stetig differenzierbare, $2\pi$-periodische Funktion.

   Zeigen Sie folgende Abklingeigenschaft (Verhalten von $I_n$ für $n \to \infty$):

$$|I_n| \;\leq\; \frac{C_k}{n^k},$$

   und geben Sie auch einen (von $f$ abhängigen) Wert für die Konstante $C_k$ an.

   *Hinweis:* partielle Integration.

[1] siehe VO-Skriptum, Abschnitt 12.1

8. Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{e^x - 1}$$

nicht existiert. Berechnen Sie den sogenannten *Cauchyschen Hauptwert*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{e^x - 1} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{e^x - 1} \right).$$

9. Überprüfen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty t^2 e^{-t}\, dt$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t}{1+t^3}\, dt$

10. Anwendungsbeispiel (siehe Praktische Mathematik I, Kapitel 6):

    Eine exponentialverteilte Zufallsvariable $X$ besitzt die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

    mit $\lambda > 0$. Verifizieren Sie, dass es sich tatsächlich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt, d.h. dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1.$$

    Berechnen Sie weiters den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx, \qquad V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 p(x)\, dx.$$