Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2011/12

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Nachtest (FR, 16.03.2012) / Gruppe 1 (*mit Lösung*)

- **Aufgabe 1.**

a) Sei $p_1, \ldots, p_n = 2, 3, 5, \ldots$ die vollständige Liste der ersten n Primzahlen.

Behauptung: Dann ist auch $p := p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ eine Primzahl, weil p durch keines der p_i ohne Rest teilbar ist.

Verifizieren oder widerlegen Sie die Korrektheit der Logik dieses Argumentes mittels einer kurzen schriftlichen Begründung. (Vorsicht: Ein Gegenbeispiel zu suchen ist ohne Rechner aussichtslos. Es gibt hier nichts zu rechnen.) *c): 2.5 P.*

p ist laut Konstruktion durch keines der p_i ohne Rest teilbar. Das bedeutet aber nicht, dass es durch jede Zahl $q < p$ ohne Rest teilbar ist. Die Logik des Argumentes ist daher nicht stichhaltig.

Gegenbeispiel:

$$p := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509 \quad \text{ist nicht prim.}$$

b) Diskutieren Sie die Konvergenz der Folge (a_n), mit *b): 1.5 P.*

$$a_n = \sin\left(\frac{n\,x}{n+x}\right)$$

in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$, und geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert der Folge an.

Aus

$$\frac{n\,x}{n+x} = \frac{x}{1+\frac{x}{n}} \to x \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

folgt mit der Stetigkeit der Sinusfunktion: Die Folge ist konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$, mit dem Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n\,x}{n+x}\right) = \sin x$$

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe konvergent? Berechnen Sie für diesen Fall ihren Wert. *c): 2 P.*

$$\sum_{n=m}^{\infty} e^{-nx}, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$e^{-nx} = (e^{-x})^n$: Geometrische Reihe mit $q = e^{-x}$. Konvergent für $|q| < 1$, also $x > 0$.

Wert der Reihe für $x < 0$, $q := e^{-x}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{\infty} q^n &= q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \ldots \\ &= q^m \left(1 + q + q^2 + \ldots\right) \\ &= q^m \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^m}{1-q} = \frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}}\end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.**

a) Sei $f(x)$ eine zweimal diffenzierbare Funktion. Geben Sie – in Abhängigkeit von f' und f'' – einen expliziten Formelausdruck an für *a): 1.5 P.*

$$\frac{d^2}{dx^2}\, f(\sin x)$$

Mit Hilfe von Kettenregel und Produktregel erhält man

$$\frac{d}{dx}\, f(\sin x) = f'(\sin x)\cos x,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\, f(\sin x) = f''(\sin x)\cos^2 x - f'(\sin x)\sin x$$

b) Geben Sie einen expliziten Formelausduck an (in Abhängigkeit von f oder einer Ableitung von f) für das unbestimmte Integral *b): 1.5 P.*

$$\int x^n\, f^{(m)}(x^{n+1})\, dx, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Die Substitution $x^{n+1} = u,\ (n+1)x^n\, dx = du$ ergibt

$$\int x^n\, f^{(m)}(x^{n+1})\, dx = \frac{1}{n+1}\, f^{(m-1)}(x^{n+1}) + C$$

c) Berechnen Sie das Integral *c): 3 P.*

$$\int \cos(\ln u)\, du$$

Hinweis: Subst dann PI

Die Substitution $\ln u = v,\ \frac{du}{u} = dv$ (bzw. dazu äquivalent $u = e^v,\ du = e^v\, dv = u\, dv$), plus nachfolgende zweifache partielle Integration ergibt

$$\int \cos(\ln u)\, du = \int \underbrace{\cos v}_{f}\, \underbrace{e^v}_{g'}\, dv = \underbrace{\cos v}_{f}\, \underbrace{e^v}_{g} - \int \underbrace{(-\sin v)}_{f'}\, \underbrace{e^v}_{g}\, dv$$

$$= \cos v\, e^v + \underbrace{\sin v}_{f'}\, \underbrace{e^v}_{g} - \int \underbrace{\cos v}_{f''}\, \underbrace{e^v}_{\int g}\, dv$$

$$\Rightarrow \int \cos v\, e^v\, dv = \frac{1}{2}\, e^v\,(\sin v + \cos v)$$

Rücksubstitution $v = \ln u$ ergibt

$$\int \cos(\ln u)\, du = \frac{u}{2}\,\big(\sin(\ln u) + \cos(\ln u)\big)$$

- **Aufgabe 3.**

a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$ um die Stelle $x_0 = 0$ bis zum Glied 3. Ordnung. (Das Restglied $R_4(x)$ muss nicht explizit angegeben werden.) *a): 2 P.*

$$f(x) = -x - \frac{1}{12}x^3 + R_4(x)$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital: *b): 2 P.*

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}\,, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$$

De l'Hospital mit ein bzw. zweimal Ableiten ergibt

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \ldots = \frac{1}{2}$$

c) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,2^{-k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

(Bitte knapp und übersichtlich die wesentlichen Schritte zusammenfassen.) *c): 2 P.*

Induktionsanfang $(n = 1)$:

$$\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k\,2^{-k} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{2^k} \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \ldots = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2011/12

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Nachtest (FR, 16.03.2012) / Gruppe 2 (*mit Lösung*)

- **Aufgabe 1.**

a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

(Bitte knapp und übersichtlich die wesentlichen Schritte zusammenfassen.) *c): 2 P.*

Induktionsanfang $(n = 1)$:

$$\frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{j}{2^j} \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = \ldots = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

b) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x) = \ln \frac{2-x}{x+2}$ um die Stelle $x_0 = 0$ bis zum Glied 3. Ordnung. (Das Restglied $R_4(x)$ muss nicht explizit angegeben werden.) *a): 2 P.*

$$f(x) = -x - \frac{1}{12}\, x^3 + R_4(x)$$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital: *b): 2 P.*

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}\,, \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

De l'Hospital mit ein bzw. zweimal Ableiten ergibt

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to 1} e^{\frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{1/x}{1}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \ldots = \frac{1}{2}$$

- **Aufgabe 2.**

a) Diskutieren Sie die Konvergenz der Folge (a_n), mit *b): 1.5 P.*

$$a_n = \sin\left(\frac{n\,y}{y+n}\right)$$

in Abhängigkeit von $y \in \mathbb{R}$, und geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert der Folge an.

Aus
$$\frac{n\,y}{y+n} = \frac{y}{1+\frac{y}{n}} \to y \quad \text{für} \quad n \to \infty$$
folgt mit der Stetigkeit der Sinusfunktion: Die Folge ist konvergent für alle $y \in \mathbb{R}$, mit dem Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n\,y}{y+n}\right) = \sin y$$

b) Sei $p_1, \ldots, p_n = 2, 3, 5, \ldots$ die vollständige Liste der ersten n Primzahlen.

Behauptung: Dann ist auch $p := p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ eine Primzahl, weil p durch keines der p_i ohne Rest teilbar ist.

Verifizieren oder widerlegen Sie die Korrektheit der Logik dieses Argumentes mittels einer kurzen schriftlichen Begründung. (Vorsicht: Ein Gegenbeispiel zu suchen ist ohne Rechner aussichtslos. Es gibt hier nichts zu rechnen.) *c): 2.5 P.*

p ist laut Konstruktion durch keines der p_i ohne Rest teilbar. Das bedeutet aber nicht, dass es durch jede Zahl $q < p$ ohne Rest teilbar ist. Die Logik des Argumentes ist daher nicht stichhaltig.

Gegenbeispiel:
$$p := 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509 \quad \text{ist nicht prim.}$$

c) Für welche $y \in \mathbb{R}$ ist die Reihe konvergent? Berechnen Sie für diesen Fall ihren Wert. *c): 2 P.*

$$\sum_{n=k}^{\infty} e^{ny}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad y \in \mathbb{R}$$

$e^{ny} = (e^y)^n$: Geometrische Reihe mit $q = e^y$. Konvergent für $|q| < 1$, also $y < 0$.

Wert der Reihe für $y < 0$, $q := e^y$:
$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty} q^n &= q^k + q^{k+1} + q^{k+2} + \ldots \\ &= q^k \left(1 + q + q^2 + \ldots\right) \\ &= q^k \sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{q^k}{1-q} = \frac{e^{ky}}{1-e^y}\end{aligned}$$

- **Aufgabe 3.**

a) Sei $f(x)$ eine zweimal diffenzierbare Funktion. Geben Sie – in Abhängigkeit von f' und f'' – einen expliziten Formelausdruck an für *a): 1.5 P.*

$$\frac{d^2}{dx^2}\, f(\cosh x)$$

Mit Hilfe von Kettenregel und Produktregel erhält man

$$\frac{d}{dx}\, f(\cosh x) = f'(\cosh x)\sinh x,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\, f(\cosh x) = f''(\cosh x)\sinh^2 x + f'(\cosh x)\cosh x$$

b) Geben Sie einen expliziten Formelausduck an (in Abhängigkeit von g oder einer Ableitung von g) für das unbestimmte Integral *b): 1.5 P.*

$$\int x^n\, g^{(k)}(x^{n+1})\, dx, \quad k, n \in \mathbb{N}$$

Die Substitution $x^{n+1} = u,\ (n+1)x^n\, dx = du$ ergibt

$$\int x^n\, g^{(k)}(x^{n+1})\, dx = \frac{1}{n+1}\, g^{(k-1)}(x^{n+1}) + C$$

c) Berechnen Sie das Integral *c): 3 P.*

$$\int \sin(\ln v)\, dv$$

Hinweis: Subst dann PI

Die Substitution $\ln v = u,\ \frac{dv}{v} = du$ (bzw. dazu äquivalent $v = e^u,\ dv = e^u\, du = v\, du$), plus nachfolgende zweifache partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
\int \sin(\ln v)\, dv &= \int \underbrace{\sin u}_{f}\, \underbrace{e^u}_{g'}\, du = \underbrace{\sin u}_{f}\, \underbrace{e^u}_{g} - \int \underbrace{\cos u}_{f'}\, \underbrace{e^u}_{g}\, du \\
&= \sin u\, e^u - \underbrace{\cos u}_{f'}\, \underbrace{e^u}_{g} + \int \underbrace{(-\sin u)}_{f''}\, \underbrace{e^u}_{\int g}\, du \\
\Rightarrow \quad \int \sin u\, e^u\, du &= \frac{1}{2}\, e^u\, (\sin u - \cos u)
\end{aligned}$$

Rücksubstitution $u = \ln x$ ergibt

$$\int \sin(\ln v)\, dv = \frac{v}{2}\, \big(\sin(\ln v) - \cos(\ln v)\big)$$