Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2011/12

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, U E (103.088)

1. Test (FR, 11.11.2011) / Gruppe 1 ***(mit Lösung)***

$\longrightarrow$

- **Aufgabe 1.**

a) Tragen Sie ein, ob die Aussage $\boxed{\textbf{wahr}}$ oder $\boxed{\textbf{falsch}}$ ist: *a): 3.5 P.*

Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0\,,\quad f(n) := n^2 - \sum_{k=1}^{n} k\,,$ ist injektiv. $\boxed{\textbf{wahr}}$

Begründen Sie Ihre Antwort in knapper, aber möglichst präziser Weise:

$$f(n) \;=\; n^2 - \sum_{k=1}^{n} k \;=\; \sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} k \;=\; \sum_{k=1}^{n} (n-k) \;=\; \sum_{j=0}^{n-1} j$$

bzw.

$$f(n) \;=\; n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \;=\; \frac{n(n-1)}{2}$$

Aus beiden Darstellungen erkennt man $f(n+1) > f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daher ist f injektiv (weil die Folge $\{f(n)\}$ streng monoton wachsend ist).

b) Stellen Sie folgendes Produkt in der einfachst möglichen Weise als Formelausdruck in n dar $(n \in \mathbb{N})$: *b): 2.5 P.*

$$\prod_{j=1}^{n-1} \Big(1 + \frac{2}{j}\Big) \;=\; \boxed{\frac{n(n+1)}{2} \;=\; \binom{n+1}{2}}$$

Anmerkung: Genau genommen geht das über ein Induktionsargument, aber man erkennt das richtige Ergebnis auch, ohne dieses streng formal auszuführen. Schreiben Sie das Produkt explizit an (in $\ldots$ - Notation) und schließen Sie daraus die allgemeine Formel.

- **Aufgabe 2.**

a) Geben Sie folgende periodische Dezimalzahl in Form eines gekürzten Bruches an: *a): 2 P.*

$$2.\overline{18} = 2.181818181818181818\ldots = \boxed{\frac{24}{11}}$$

b) Formen Sie auf einfachst mögliche Darstellung um (Formelausdruck in $n \in \mathbb{N}$): *b): 2 P.*

$$\sum_{k=0}^{n} (n-1)^k \binom{n}{k} (n+1)^k = \boxed{n^{2n}}$$

c) Geben Sie folgende Mengen in möglichst einfacher Weise an: *c): 2 P.*

(i) $\{x \in \mathbb{R} \colon \exists\, n \in \mathbb{N} \colon nx \in \mathbb{Q}\} = \boxed{\mathbb{Q}}$

(ii) $\{x \in \mathbb{Q} \colon \exists\, n \in \mathbb{N} \colon x + n \notin \mathbb{N}\} = \boxed{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}}$

(iii) $\{x \in \mathbb{R} \colon x > 0 \text{ oder } x < 1\} = \boxed{\mathbb{R}}$

(iv) $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 2 \text{ oder } x^3 \leq 1\} = \boxed{(-\infty, \sqrt{2}\,)}$

- **Aufgabe 3.**

a) Für welche (fest gewählten) Werte $c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge (a_n) beschränkt für $n \to \infty$?

a): 2 P.

$$(a_n) = \left((c + \tfrac{1}{n})^k\right) \quad \text{beschränkt für} \quad \boxed{c,\ k \quad \text{beliebig}}$$

b) Für welche (fest gewählten) Werte $c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge aus a) konvergent, und wie lautet ihr Grenzwert?

b): 2 P.

$$(a_n) = \left((c + \tfrac{1}{n})^k\right) \quad \text{konvergent für} \quad \boxed{c,\ k \quad \text{beliebig}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = c^k}$$

c) Geben Sie für die durch

c): 2 P.

$$a_1 := 5, \qquad a_n := \tfrac{1}{n} + a_{n-1}\left(1 + \tfrac{1}{n}\right), \quad n \geq 2$$

rekursiv definierte Folge einen möglichst einfachen expliziten Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an.

$$a_n = \boxed{5 + 3\,(n-1) \;=\; 3\,n + 2}$$

Anmerkung: Genau genommen geht das über ein Induktionsargument, aber man erkennt das richtige Ergebnis auch, ohne dieses streng formal auszuführen: Sehen Sie sich einige Folgenglieder an und folgern Sie daraus die allgemeine Formel.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2011/12

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, U E (103.088)

1. Test (FR, 11.11.2011) / Gruppe 2 (***mit Lösung***)

$\longrightarrow$

- **Aufgabe 1.**

a) Tragen Sie ein, ob die Aussage **wahr** oder **falsch** ist: *a): 3.5 P.*

Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := [\sqrt{n(n+2)+\frac{3}{2}}\,]$, ist surjektiv. **falsch**

([...] bezeichnet die Gauß-Klammer.)

Begründen Sie Ihre Antwort in knapper, aber möglichst präziser Weise, und geben Sie auch einen möglichst einfachen *Formelausdruck* für die Funktionswerte $f(n)$ an.

$f(n)$: $f(n) = n + 1$

Begründung:

$$f(n) = [\sqrt{n^2+2n+1+\tfrac{1}{2}}\,] = [\sqrt{(n+1)^2+\tfrac{1}{2}}\,]$$

mit

$$(n+1)^2 < (n+1)^2 + \tfrac{1}{2} < (n+2)^2$$

Daher gilt

$$\boxed{f(n) = n + 1}$$

und f ist nicht surjektiv: $1 \notin f(\mathbb{N})$.

b) Stellen Sie folgendes Produkt in der einfachst möglichen Weise als Formelausdruck in n dar ($n \in \mathbb{N}$): *b): 2.5 P.*

$$\prod_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j} - 1\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Anmerkung: Genau genommen geht das über ein Induktionsargument, aber an erkennt das richtige Ergebnis auch, ohne dieses streng formal auszuführen. Schreiben Sie das Produkt explizit an (in ... - Notation) und schließen Sie daraus die allgemeine Formel.

- **Aufgabe 2.**

a) Geben Sie folgende periodische Dezimalzahl in Form eines gekürzten Bruches an: *a): 2 P.*

$$2.\overline{27} = 2.27272727272727\ldots = \boxed{\frac{25}{11}}$$

b) Formen Sie auf einfachst mögliche Darstellung um (Formelausdruck in $n \in \mathbb{N}$): *b): 2 P.*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} = \boxed{\frac{2^n}{n!}}$$

c) Drücken Sie folgende Mengen in möglichst einfacher Weise aus: *c): 2 P.*

(i) $\{x \in \mathbb{R} \colon \exists\, q \in \mathbb{Q} \colon \frac{x}{q} \in \mathbb{Q}\} = \boxed{\mathbb{Q}}$

(ii) $\{q \in \mathbb{Q} \colon \forall\, n \in \mathbb{N} \colon q + n \in \mathbb{N}\} = \boxed{\mathbb{N}_0}$

(iii) $\{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0 \text{ und } \frac{1}{x} < \sqrt{2}\} = \boxed{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)}$

(iv) $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 2 \text{ oder } x \leq 1\} = \boxed{(-\infty, \sqrt{2}\,)}$

- **Aufgabe 3.**

a) Für welche (fest gewählten) Werte $\gamma \in \mathbb{R}$ und $j \in \mathbb{N}$ ist die Folge (a_n) beschränkt für $n \to \infty$?

a): 2 P.

$$(a_n) \;=\; \big((2 - \tfrac{\gamma}{n})^j \big) \quad \text{beschränkt für} \quad \boxed{\gamma,\, j \quad \text{beliebig}}$$

b) Für welche (fest gewählten) Werte $\gamma \in \mathbb{R}$ und $j \in \mathbb{N}$ ist die Folge aus a) konvergent, und wie lautet ihr Grenzwert?

b): 2 P.

$$(a_n) \;=\; \big((2 - \tfrac{\gamma}{n})^j \big) \quad \text{konvergent für} \quad \boxed{\gamma,\, j \quad \text{beliebig,} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2^j}$$

c) Geben Sie für die durch

c): 2 P.

$$a_1 := 4, \qquad a_n := \big(1 + \tfrac{2}{n}\big)\, a_{n-1} + \tfrac{4}{n}, \quad n \geq 2$$

rekursiv definierte Folge einen möglichst einfachen expliziten Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an.

$$a_n \;=\; \boxed{n^2 + 3\,n}$$

Anmerkung: Genau genommen geht das über ein Induktionsargument, aber man erkennt das richtige Ergebnis auch, ohne dieses streng formal auszuführen. Sehen Sie sich einige Folgenglieder an und schließen Sie daraus die allgemeine Formel.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2011/12

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Test (FR, 11.11.2011) / Gruppe 3 (*mit Lösung*)

⟶

- **Aufgabe 1.**

a) Stellen Sie folgendes Produkt in der einfachst möglichen Weise als Formelausdruck in n dar ($n \geq 2$): *a): 2.5 P.*

$$\prod_{j=2}^{n-1} \left(\frac{1}{j} - 1 \right) = \boxed{\frac{(-1)^n}{n-1}}$$

Anmerkung: Genau genommen geht das über ein Induktionsargument, aber an erkennt das richtige Ergebnis auch, ohne dieses streng formal auszuführen. Schreiben Sie das Produkt explizit an (in ... - Notation) und schließen Sie daraus die allgemeine Formel.

b) Tragen Sie ein, ob die Aussage **wahr** oder **falsch** ist: *b): 3.5 P.*

Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) := [\sqrt{(n-1)(n+1) + \frac{3}{2}}\,]$, ist surjektiv. **wahr**

([...] bezeichnet die Gauß-Klammer.)

Begründen Sie Ihre Antwort in knapper, aber möglichst präziser Weise, und geben Sie auch einen möglichst einfachen *Formelausdruck* für die Funktionswerte $f(n)$ an.

$f(n)$: $\boxed{f(n) = n}$

Begründung:

$$f(n) = [\sqrt{n^2 - 1 + \tfrac{3}{2}}\,] = [\sqrt{n^2 + \tfrac{1}{2}}\,]$$

mit

$$n^2 < n^2 + \tfrac{1}{2} < (n+1)^2$$

Daher gilt

$$\boxed{f(n) = n}$$

und f ist surjektiv (die identische Abbildung).

- **Aufgabe 2.**

a) Formen Sie auf einfachst mögliche Darstellung um (Formelausdruck in $n \in \mathbb{N}$): *a): 2 P.*

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(k-j)!\,j!} \;=\; \boxed{\frac{2^k}{k!}}$$

b) Geben Sie folgende periodische Dezimalzahl in Form eines gekürzten Bruches an: *b): 2 P.*

$$2.\overline{36} \;=\; 2.3636363636363636\ldots \;=\; \boxed{\frac{26}{11}}$$

c) Drücken Sie folgende Mengen in möglichst einfacher Weise aus: *c): 2 P.*

(i) $\{x \in \mathbb{R}\colon\ x \geq 0 \text{ und } \frac{1}{x} < \sqrt{3}\} \;=\; \boxed{\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)}$

(ii) $\{x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 < 2 \text{ oder } x \leq 1\} \;=\; \boxed{(-\infty, \sqrt{2}\,)}$

(iii) $\{x \in \mathbb{R}\colon\ \exists\, q \in \mathbb{Q}\colon\ \frac{x}{q} \in \mathbb{Q}\} \;=\; \boxed{\mathbb{Q}}$

(iv) $\{q \in \mathbb{Q}\colon\ \forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ q + n \in \mathbb{N}\} \;=\; \boxed{\mathbb{N}_0}$

- **Aufgabe 3.**

a) Geben Sie für die durch *a): 2 P.*

$$a_1 := 3, \qquad a_n := \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) a_{n-1} + \tfrac{3}{n}, \quad n \geq 2$$

rekursiv definierte Folge einen möglichst einfachen expliziten Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an.

$$a_n = \boxed{3\,n}$$

Anmerkung: Genau genommen geht das über ein Induktionsargument, aber man erkennt das richtige Ergebnis auch, ohne dieses streng formal auszuführen. Sehen Sie sich einige Folgenglieder an und schließen Sie daraus die allgemeine Formel.

b) Für welche (fest gewählten) Werte $c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge (a_n) beschränkt für $n \to \infty$?

b): 2 P.

$$(a_n) = \left((2 - \tfrac{c}{n})^k\right) \quad \text{beschränkt für} \quad \boxed{c,\, k \quad \text{beliebig}}$$

c) Für welche (fest gewählten) Werte $c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge aus b) konvergent, und wie lautet ihr Grenzwert? *c): 2 P.*

$$(a_n) = \left((2 - \tfrac{c}{n})^k\right) \quad \text{konvergent für} \quad \boxed{c,\, k \quad \text{beliebig}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2^k}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2011/12

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, U E (103.088)

1. Test (FR, 11.11.2011) / Gruppe 4 (*mit Lösung*)

⟶

- **Aufgabe 1.**

a) Stellen Sie folgendes Produkt in der einfachst möglichen Weise als Formelausdruck in n dar ($n \geq 2$): *a): 2.5 P.*

$$\prod_{k=1}^{n-2} \left(1 + \frac{2}{k}\right) = \boxed{\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}}$$

Anmerkung: Genau genommen geht das über ein Induktionsargument, aber man erkennt das richtige Ergebnis auch, ohne dieses streng formal auszuführen. Schreiben Sie das Produkt explizit an (in ... - Notation) und schließen Sie daraus die allgemeine Formel.

b) Tragen Sie ein, ob die Aussage **wahr** oder **falsch** ist: *b): 3.5 P.*

Die Funktion $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $g(n) := n^2 - \sum_{j=0}^{n} j$, ist injektiv. **wahr**

Begründen Sie Ihre Antwort in knapper, aber möglichst präziser Weise:

$$g(n) = n^2 - \sum_{j=0}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} n - \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} (n-j) = \sum_{k=0}^{n-1} k$$

bzw.

$$g(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Aus beiden Darstellungen erkennt man $g(n+1) > g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daher ist g injektiv (weil die Folge $\{g(n)\}$ streng monoton wachsend ist).

• **Aufgabe 2.**

a) Formen Sie auf einfachst mögliche Darstellung um (Formelausdruck in $n \in \mathbb{N}$): *a): 2 P.*

$$\sum_{j=0}^{n} (n+1)^j \binom{n}{j} (n-1)^j = \boxed{n^{2n}}$$

b) Geben Sie folgende periodische Dezimalzahl in Form eines gekürzten Bruches an: *b): 2 P.*

$$2.\overline{09} = 2.0909090909090909\ldots = \boxed{\frac{23}{11}}$$

c) Geben Sie folgende Mengen in möglichst einfacher Weise an: *c): 2 P.*

(i) $\{x \in \mathbb{R} \colon x > 1 \text{ oder } x < 2\} = \boxed{\mathbb{R}}$

(ii) $\{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 3 \text{ oder } x^3 \leq 1\} = \boxed{(-\infty, \sqrt{3}\,)}$

(iii) $\{x \in \mathbb{R} \colon \exists\, n \in \mathbb{N} \colon nx \in \mathbb{Q}\} = \boxed{\mathbb{Q}}$

(iv) $\{x \in \mathbb{Q} \colon \exists\, n \in \mathbb{N} \colon x + n \notin \mathbb{N}\} = \boxed{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}}$

- **Aufgabe 3.**

a) Geben Sie für die durch *a): 2 P.*

$$a_1 := 3, \qquad a_k := \tfrac{1}{k} + a_{k-1}\left(1 + \tfrac{1}{k}\right), \quad k \geq 2$$

rekursiv definierte Folge einen möglichst einfachen expliziten Formelausdruck in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}$ an.

$$a_k = \boxed{3 + 2\,(k-1) \;=\; 2\,k + 1}$$

Anmerkung: Genau genommen geht das über ein Induktionsargument, aber man erkennt das richtige Ergebnis auch, ohne dieses streng formal auszuführen: Sehen Sie sich einige Folgenglieder an und folgern Sie daraus die allgemeine Formel.

b) Für welche (fest gewählten) Werte $x \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{N}$ ist die Folge (a_n) beschränkt für $n \to \infty$?

b): 2 P.

$$(a_n) \;=\; \left((x + \tfrac{1}{n})^p \right) \quad \text{beschränkt für} \quad \boxed{x,\, p \quad \text{beliebig}}$$

c) Für welche (fest gewählten) Werte $x \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{N}$ ist die Folge aus b) konvergent, und wie lautet ihr Grenzwert? *c): 2 P.*

$$(a_n) \;=\; \left((x + \tfrac{1}{n})^p \right) \quad \text{konvergent für} \quad \boxed{x,\, p \quad \text{beliebig}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = x^p}$$