Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2011/12

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Test (FR, 13.01.2012) / Gruppe 1 *(mit Lösung)*

$\longrightarrow$

- **Aufgabe 1.**

Gegeben sei die folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4y)^{2n+2}$$

a) Für welche Parameterwerte $y \in \mathbb{R}$ ist die Reihe absolut konvergent? *a): 1.5 P.*

$$y \in \boxed{\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}$$

b) Berechnen Sie für alle Parameter y aus dem Konvergenzbereich den Grenzwert der Reihe. *b): 1.5 P.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4y)^{2n+2} = \boxed{\frac{(4y)^2}{1-(4y)^2}}$$

Betrachten Sie nun die folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+5}$$

c) Geben Sie an, ob die Reihe konvergent ist (mit kurzer Begründung). *c): 1.5 P.*

Da $a_n := \frac{1}{3n+5}$ eine monotone Nullfolge ist, folgt mit dem Leibniz-Kriterium die Konvergenz.

d) Welche Aussage über die absolute Konvergenz der Reihe können Sie mit mit Hilfe des Quotientenkriteriums treffen? Ist diese Reihe absolut konvergent? (Begründung!) *d): 1.5 P.*

Mit $a_n := \frac{1}{3n+5}$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1$, aber nicht $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$. Daher kann mit dem Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz getroffen werden. Diese Reihe ist nicht absolut konvergent, es liegt eine harmonische Reihe vor.

- **Aufgabe 2.**

  Gegeben sei folgende Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{\sin(5x)}{2x}$$

a) Berechnen Sie den Grenzwert $f(x)$ für $x \to 0$, falls dieser existiert. *a): 1 P.*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{\frac{5}{2}}$$

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x)$. *b): 1.5 P.*

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \boxed{\frac{5x\cos(5x) - \sin(5x)}{2x^2}}$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Ableitung $f'(x)$ für $x \to 0$, falls dieser existiert. *c): 1.5 P.*

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \boxed{0}$$

d) Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{10}$ an. *d): 2 P.*

Tangentengleichung: $\boxed{y = \frac{4\cdot 5}{2\pi}(1 - \frac{5}{\pi}x)}$

- **Aufgabe 3.**

Gegeben sei folgende Funktion $f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{\operatorname{sign}(\sin(4x))}{x}$$

a) An welchen Stellen ist die Funktion $f(x)$ stetig bzw. unstetig? Geben Sie **alle** Unstetigkeitsstellen und den jeweiligen Typ an. (Hinweis: Es empfiehlt sich die Anfertigung einer Skizze) *a): 2.5 P.*

Unstetigkeitsstellen:

Pol 1. Ordnung an $x = 0$
Sprungstellen an $x = \frac{\pi n}{4},\ \forall n \in \mathbb{N}$

b) Tragen Sie ein, ob die folgende Aussage **wahr** oder **falsch** ist: *b): 1 P.*

Die Funktion $f(x)$ ist auf dem gesamten Definitionsbereich beschränkt. **falsch**

c) Ermitteln Sie den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$, falls dieser existiert. Begründen Sie gegebenenfalls kurz, warum Konvergenz vorliegt, bzw. warum $f(x)$ nicht konvergiert. *c): 2.5 P.*

Da $f_1(x) := \operatorname{sign}(\sin(4x))$ durch $|f_1(x)| \leq 1$ beschränkt ist, und
$f_2(x) := \frac{1}{x}$ für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert gilt auch, dass
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0.$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2011/12

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Test (FR, 13.01.2012) / Gruppe 2 (***mit Lösung***)

$\longrightarrow$

- **Aufgabe 1.**

Gegeben sei die folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2y)^{2n+6}$$

a) Für welche Parameterwerte $y \in \mathbb{R}$ ist die Reihe absolut konvergent? *a): 1.5 P.*

$$y \in \boxed{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

b) Berechnen Sie für alle Parameter y aus dem Konvergenzbereich den Grenzwert der Reihe. *b): 1.5 P.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2y)^{2n+6} = \boxed{\frac{(2y)^6}{1-(2y)^2}}$$

Betrachten Sie nun die folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7n+2}$$

c) Geben Sie an, ob die Reihe konvergent ist (mit kurzer Begründung). *c): 1.5 P.*

Da $a_n := \frac{1}{7n+2}$ eine monotone Nullfolge ist, folgt mit dem Leibniz-Kriterium die Konvergenz.

d) Welche Aussage über die absolute Konvergenz der Reihe können Sie mit mit Hilfe des Quotientenkriteriums treffen? Ist diese Reihe absolut konvergent? (Begründung!) *d): 1.5 P.*

Mit $a_n := \frac{1}{7n+2}$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1$, aber nicht $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$. Daher kann mit dem Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz getroffen werden.
Diese Reihe ist nicht absolut konvergent, es liegt eine harmonische Reihe vor.

- **Aufgabe 2.**

Gegeben sei folgende Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{\sin(2x)}{5x}$$

a) Berechnen Sie den Grenzwert $f(x)$ für $x \to 0$, falls dieser existiert. *a): 1 P.*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{\frac{2}{5}}$$

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x)$. *b): 1.5 P.*

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \boxed{\frac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{5x^2}}$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Ableitung $f'(x)$ für $x \to 0$, falls dieser existiert. *c): 1.5 P.*

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \boxed{0}$$

d) Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ an. *d): 2 P.*

Tangentengleichung: $\boxed{y = \frac{4\cdot 2}{5\pi}(1 - \frac{2}{\pi}x)}$

- **Aufgabe 3.**

Gegeben sei folgende Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{\operatorname{sign}(\sin(2x))}{x}$$

a) An welchen Stellen ist die Funktion $f(x)$ stetig bzw. unstetig? Geben Sie **alle** Unstetigkeitsstellen und den jeweiligen Typ an. (Hinweis: Es empfiehlt sich die Anfertigung einer Skizze) *a): 2.5 P.*

Unstetigkeitsstellen:

Pol 1. Ordnung an $x = 0$ Sprungstellen an $x = \frac{\pi n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) Tragen Sie ein, ob die folgende Aussage **wahr** oder **falsch** ist: *b): 1 P.*

Die Funktion $f(x)$ ist auf dem gesamten Definitionsbereich beschränkt. **falsch**

c) Ermitteln Sie den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$, falls dieser existiert. Begründen Sie gegebenenfalls kurz, warum Konvergenz vorliegt, bzw. warum $f(x)$ nicht konvergiert. *c): 2.5 P.*

Da $f_1(x) := \operatorname{sign}(\sin(2x))$ durch $|f_1(x)| \leq 1$ beschränkt ist, und $f_2(x) := \frac{1}{x}$ für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert gilt auch, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2011/12

A N A L Y S I S I F Ü R T P H, U E (103.088)

2. Test (FR, 13.01.2012) / Gruppe 3 ***(mit Lösung)***

$\longrightarrow$

- **Aufgabe 1.**

Gegeben sei die folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4y)^{2n+3}$$

a) Für welche Parameterwerte $y \in \mathbb{R}$ ist die Reihe absolut konvergent? *a): 1.5 P.*

$$y \in \boxed{\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}$$

b) Berechnen Sie für alle Parameter y aus dem Konvergenzbereich den Grenzwert der Reihe. *b): 1.5 P.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4y)^{2n+3} = \boxed{\frac{(4y)^3}{1-(4y)^2}}$$

Betrachten Sie nun die folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+9}$$

c) Geben Sie an, ob die Reihe konvergent ist (mit kurzer Begründung). *c): 1.5 P.*

Da $a_n := \frac{1}{2n+9}$ eine monotone Nullfolge ist, folgt mit dem Leibniz-Kriterium die Konvergenz.

d) Welche Aussage über die absolute Konvergenz der Reihe können Sie mit mit Hilfe des Quotientenkriteriums treffen? Ist diese Reihe absolut konvergent? (Begründung!) *d): 1.5 P.*

Mit $a_n := \frac{1}{2n+9}$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1$, aber nicht $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$. Daher kann mit dem Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz getroffen werden.
Diese Reihe ist nicht absolut konvergent, es liegt eine harmonische Reihe vor.

- **Aufgabe 2.**

Gegeben sei folgende Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{\sin(3x)}{5x}$$

a) Berechnen Sie den Grenzwert $f(x)$ für $x \to 0$, falls dieser existiert. *a): 1 P.*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{\frac{3}{5}}$$

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x)$. *b): 1.5 P.*

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \boxed{\frac{3x\cos(3x) - \sin(3x)}{5x^2}}$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Ableitung $f'(x)$ für $x \to 0$, falls dieser existiert. *c): 1.5 P.*

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \boxed{0}$$

d) Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{6}$ an. *d): 2 P.*

Tangentengleichung: $\boxed{y = \frac{4\cdot 3}{5\pi}(1 - \frac{3}{\pi}x)}$

- **Aufgabe 3.**

Gegeben sei folgende Funktion $f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{\operatorname{sign}(\sin(6x))}{x}$$

a) An welchen Stellen ist die Funktion $f(x)$ stetig bzw. unstetig? Geben Sie **alle** Unstetigkeitsstellen und den jeweiligen Typ an. (Hinweis: Es empfiehlt sich die Anfertigung einer Skizze) *a): 2.5 P.*

Unstetigkeitsstellen:

Pol 1. Ordnung an $x = 0$
Sprungstellen an $x = \frac{\pi n}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) Tragen Sie ein, ob die folgende Aussage **wahr** oder **falsch** ist: *b): 1 P.*

Die Funktion $f(x)$ ist auf dem gesamten Definitionsbereich beschränkt. **falsch**

c) Ermitteln Sie den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$, falls dieser existiert. Begründen Sie gegebenenfalls kurz, warum Konvergenz vorliegt, bzw. warum $f(x)$ nicht konvergiert. *c): 2.5 P.*

Da $f_1(x) := \operatorname{sign}(\sin(6x))$ durch $|f_1(x)| \leq 1$ beschränkt ist, und $f_2(x) := \frac{1}{x}$ für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert gilt auch, dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2011/12

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Test (FR, 13.01.2012) / Gruppe 4 (***mit Lösung***)

$\longrightarrow$

- **Aufgabe 1.**

Gegeben sei die folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (5y)^{2n+7}$$

a) Für welche Parameterwerte $y \in \mathbb{R}$ ist die Reihe absolut konvergent? *a): 1.5 P.*

$$y \in \boxed{\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)}$$

b) Berechnen Sie für alle Parameter y aus dem Konvergenzbereich den Grenzwert der Reihe. *b): 1.5 P.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (5y)^{2n+7} = \boxed{\frac{(5y)^7}{1-(5y)^2}}$$

Betrachten Sie nun die folgende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$$

c) Geben Sie an, ob die Reihe konvergent ist (mit kurzer Begründung). *c): 1.5 P.*

Da $a_n := \frac{1}{3n+2}$ eine monotone Nullfolge ist, folgt mit dem Leibniz-Kriterium die Konvergenz.

d) Welche Aussage über die absolute Konvergenz der Reihe können Sie mit mit Hilfe des Quotientenkriteriums treffen? Ist diese Reihe absolut konvergent? (Begründung!) *d): 1.5 P.*

Mit $a_n := \frac{1}{3n+2}$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1$, aber nicht $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$. Daher kann mit dem Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz getroffen werden.
Diese Reihe ist nicht absolut konvergent, es liegt eine harmonische Reihe vor.

- **Aufgabe 2.**

  Gegeben sei folgende Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{\sin(2x)}{4x}$$

a) Berechnen Sie den Grenzwert $f(x)$ für $x \to 0$, falls dieser existiert. *a): 1 P.*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{\frac{2}{4}}$$

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x)$. *b): 1.5 P.*

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \boxed{\frac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{4x^2}}$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Ableitung $f'(x)$ für $x \to 0$, falls dieser existiert. *c): 1.5 P.*

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \boxed{0}$$

d) Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ an. *d): 2 P.*

Tangentengleichung: $\boxed{y = \frac{4\cdot 2}{4\pi}(1 - \frac{2}{\pi}x)}$

- **Aufgabe 3.**

Gegeben sei folgende Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{\operatorname{sign}(\sin(3x))}{x}$$

a) An welchen Stellen ist die Funktion $f(x)$ stetig bzw. unstetig? Geben Sie **alle** Unstetigkeitsstellen und den jeweiligen Typ an. (Hinweis: Es empfiehlt sich die Anfertigung einer Skizze) *a): 2.5 P.*

Unstetigkeitsstellen:

Pol 1. Ordnung an $x = 0$
Sprungstellen an $x = \frac{\pi n}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) Tragen Sie ein, ob die folgende Aussage **wahr** oder **falsch** ist: *b): 1 P.*

Die Funktion $f(x)$ ist auf dem gesamten Definitionsbereich beschränkt. **falsch**

c) Ermitteln Sie den Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$, falls dieser existiert. Begründen Sie gegebenenfalls kurz, warum Konvergenz vorliegt, bzw. warum $f(x)$ nicht konvergiert. *c): 2.5 P.*

Da $f_1(x) := \operatorname{sign}(\sin(3x))$ durch $|f_1(x)| \leq 1$ beschränkt ist, und $f_2(x) := \frac{1}{x}$ für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert gilt auch, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0.$