1. Wie lautet die logische Negation der folgenden Aussage?

Es gibt keine Stadt, in der keine Person existiert,
die nicht alle Primzahlen kennt.

Formulieren Sie die negierte Aussage mittels möglichst weniger Verneinungen. Schreiben Sie alles auch in formal-logischer Notation an (mit Quantoren, etc.).

Ist die Aussage *de facto* wahr, falsch, oder unentscheidbar?

2. Beweisen Sie die folgende bekannte Aussage:

Eine natürliche Zahl n ist durch 3 teilbar,
falls die Summe ihrer Dezimalziffern durch 3 teilbar ist.

(Es gilt auch die Umkehrung, der Beweis ist aber nicht Thema dieser Aufgabe.)

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $10 \leq n < 100,\ 100 \leq n < 1{,}000, \ldots$. So kommt man auf die Idee für den Beweis.

3. Beweisen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \Big) = \frac{2n}{n+\frac{1}{2}}\,.$$

4. Stellen Sie eine Vermutung darüber auf, wie ein einfacher Formelausdruck in $n \in \mathbb{N}$ für den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, k^2$$

aussieht (rechnen!), und beweisen Sie Ihre Vermutung.

5. Es seien $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ die 'Harmonischen Zahlen' (dafür gibt es keinen expliziten Formelausdruck). Stellen Sie den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

mit Hilfe der Harmonischen Zahlen dar.

Hinweis: Substituieren Sie für den Index k in geeigneter Weise. (Substitution hilft manchmal bei der Berechnung von Summen, ähnlich wie bei der Substitutionsregel für Integrale.)

6. Berechnen Sie die Werte der Summen

$$\text{a)}\quad \sum_{k=1}^{n} n^{n-k}, \qquad\qquad \text{b)}\quad 0.\underbrace{101010\ldots101010}_{2n \text{ Binärziffern } (n \text{ mal } '10')}$$

Der Ausdruck b) ist nicht als Dezimaldarstellung (bezüglich der Basis 10) sondern als Binärdarstellung (bezüglich der Basis 2) einer rationalen Zahl zu interpretieren. Geben Sie den Wert dieser Zahl als Bruch (in Dezimalnotation) an. Was passiert für $n \to \infty$?

7. a) Ein *Kettenbruch* ist ein Ausdruck der Gestalt

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots}}}$$

Schreiben Sie einen Computerprogramm, das zu gegebenen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ und $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{N}$ den Wert des Kettenbruches mittels einer Schleife berechnet (rationale Arithmetik). (Der Kettenbruch bricht bei b_n ab.)

b) Jede rationale Zahl lässt sich als endlicher (abbrechender) Kettenbruch darstellen. Es gibt auch unendliche Kettenbruchentwicklungen für irrationale Zahlen, z.B.

$$\sqrt{2} \;=\; 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

'Verifizieren' Sie diese Entwicklung mit ihrem Programm. Wie viele Terme benötigt man, um 10 Dezimalstellen von $\sqrt{2}$ korrekt zu erhalten?

8. Zeigen Sie folgende Identität für $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{F_n(k)\,(n-k)!}\,, \quad \text{mit} \quad F_n(k) := \prod_{j=1}^{k} nj\,.$$

9. a) Es seien $A_1, \dots, A_n$ Mengen. Mit

$$\textstyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

wird der Durchschnitt bzw. die Vereinigung aller dieser Mengen bezeichnet. Damit ist intuitiv klar, was gemeint ist; eine saubere mathematische Definition erfolgt jedoch in rekursiver Weise, basierend auf den vorgegebenen, bekannten Begriffen $\cap$ und $\cup$ für Durchschnitt und Vereinigung zweier Mengen. Geben Sie an, wie diese rekursive Definition aussieht.
Anmerkung: Man kann die Induktion mit $n = 1$ beginnen: $\bigcap_{i=1}^{1} A_i = \bigcup_{i=1}^{1} A_i = A_1$.

b) Alternativ dazu:

$$\textstyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i := \{\, x \text{ mit der Eigenschaft } \dots \,\}, \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i := \{\, x \text{ mit der Eigenschaft } \dots \,\}$$

Verwenden Sie logische Quantoren, um dies präzise zu formulieren (vgl. $n = 2$), und zeigen Sie die Äquivalenz der Definitionen a) und b).

c) Geben Sie $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ und $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ an für $A_i = \{x \in \mathbb{N} \colon x \geq i\}$.

10. Ein Anwendungsproblem ('Hypercube'; einfach – es geht eigentlich nur um die korrekte Formalisierung):

Eine Anzahl von 2^n Orten in einem Bezirk A ist in folgender Weise durch Straßen miteinander verbunden: Zu jedem Ort gibt es genau n direkte Verbindungen zu n anderen Orten, und zwar in der Weise, dass maximal n Teilstrecken zu durchlaufen sind, um von irgendeinem Ort in A zu einem beliebigen anderen Ort in A zu gelangen.

In einem Nachbarbezirk B gibt es ebenfalls 2^n Orte, mit der gleichen Eigenschaft wie oben. Überlegen Sie, in welcher Weise Orte aus A mit Orten aus B direkt verbunden werden müssen, so dass der neue Gesamtbezirk $C = A + B$ (bestehend aus 2^{n+1} Orten) wiederum die analoge Eigenschaft hat: Zu jedem Ort in C gibt es genau $n + 1$ direkte Verbindungen zu $n + 1$ anderen Orten in C, und es sind maximal $n + 1$ Teilstrecken zu durchlaufen, um von irgendeinem Ort in C zu einem beliebigen anderen Ort in C zu gelangen. (Eigentlich ist das ein Induktionsargument. Überprüfen Sie, dass auch der Induktionsanfang $n = 1$ realisierbar ist, sonst 'hängt' das Argument in der Luft.)[1]

Anmerkung: Mengentheoretisch gesehen ist ein 'Bezirk' A einfach eine endliche Menge, und die Orte sind ihre Elemente. Die Verbindungen zwischen den Orten (bidirektional, also keine Einbahnen) identifiziert man mit Elementen der Produktmenge $A \otimes A := \{\{a_1, a_2\} \colon a_1 \neq a_2 \in A\}$. Allgemein spricht man von einem (bidirektionalen) *Graphen* (N, K), mit *Knoten* $a \in N \subseteq A$ und *Kanten* $\{a_1, a_2\} \in K \subseteq A \otimes A$.

Visualisierung: z.B. eine dreidimensionale Welt (d.h. $A \subseteq \mathbb{R}^3$) und $n = 2$. Was fangen Sie mit dem Stichwort 'Hypercube' an (siehe oben)? (Denken Sie z.B. an eine 4-dimensionale Welt und $n = 3$.)

Die Notation $A + B$ verwendet man manchmal für die Vereinigung $A \cup B$ disjunkter Mengen ($A \cap B = \{\}$).

[1] Es gibt Beispiele von Aussagen, für die der Induktionsschluss funktioniert, die aber trotzdem falsch sind, weil der Induktionsanfang nicht klappt.

Anmerkung: Manche Aufgaben auf den Übungsblättern sind signifikant umfangreicher oder schwieriger als typische Testbeispiele. Abgesehen davon gilt der Stoff der ersten beiden Übungsblätter für den 1. Test am 11.11.2011.

1. Bestimmen Sie die reellen Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

a) $|x-4| \leq 2x+3$ b) $|x-4| \geq |x-1|$

2. Gegeben seien die Abbildungen $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{3+2x}{1-x}$, und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2|x|$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D der Abbildung f.

b) Sind die Abbildungen f und g injektiv, surjektiv, bijektiv?

c) Wie ist der Definitionsbereich der Abbildungen f und g einzuschränken, damit sie injektiv werden?

d) Wie ist der Bildbereich der Abbildungen f und g zu verändern, damit sie surjektiv werden?

e) Bestimmen Sie durch geeignete Einschränkung von f und g die entsprechenden bijektiven Abbildungen und deren Umkehrabbildungen.

3. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \sqrt{2-x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

a) Bestimmen Sie die maximalen reellen Definitionsbereiche von f und g.

b) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ zusammen mit ihren maximalen reellen Definitionsbereichen.

c) Geben Sie die Abbildungen $f \circ f,\ f \circ f \circ f, \ldots,\ g \circ g,\ g \circ g \circ g,\ \ldots$ an. Was fällt Ihnen auf?

4. Betrachten Sie die unten angegebenen Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie jeweils die inneren und äußeren Punkte, sowie den Rand der Menge. Sind die Mengen offen und/oder abgeschlossen? Geben Sie die Häufungspunkte und die isolierten Punkte beider Mengen an.

a) $A = [1,4] \setminus (1,3)$ b) $B = [0,1) \cup (1,2]$

5. Zeigen Sie, dass für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$x \text{ ist Häufungspunkt von } A \iff \forall\, 0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}:\ K_r(x,\varepsilon) \text{ enthält unendlich viele Punkte von } A,$$

wobei $\bar{\varepsilon} > 0$ beliebig gewählt werden kann. ($K_r(x,\varepsilon) = K(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$.)

6. Zeigen Sie: Für $|q| < 1$ ist die Folge (a_n), definiert durch $a_n := n\,q^n$, eine Nullfolge.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Folge $(|a_n|)$ für hinreichend großes n streng monoton fallend ist. Zur Bestimmung des Grenzwertes nützt man aus, dass gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.

Anmerkung: Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass für $|q| < 1$ auch jede Folge (a_n) mit $a_n = n^p\,q^n$ ($p \in \mathbb{N}$) eine Nullfolge ist ('freiwillige' Übung).

7. Die (rationale Folge) (a_n) sei definiert über die Kettenbruchentwicklung (*continued fraction*, vgl. Übung 1)

$$a_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

d.h. $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ \ldots$

a) Geben Sie für die a_n eine Rekursionsformel der Gestalt $a_n = \varphi(a_{n-1})$ an ($n \geq 1$). Wie lautet die Funktion φ? Hinweis: 'Hintenrum' denken.

b) Zeigen Sie: Für alle $n \geq 1$ gilt $a_n \in [\frac{3}{2}, 2]$. Die Folge ist also beschränkt.
Hinweis: Induktionsargument.

c) Die Folge (a_n) ist nicht monoton. Wir betrachten nun die Teilfolgen

$$(a_0, a_2, a_4, \ldots) \quad \text{und} \quad (a_1, a_3, a_5, \ldots)$$

Zeigen Sie: $a_{k-1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < a_k$ für alle $k = 1, 3, 5, \ldots$

Hinweis: Induktionsargument. Die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist die positive Wurzel (Lösung) der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$.

d) Folgern Sie aus c): $(a_0, a_2, a_4, \ldots)$ ist streng monoton wachsend, und $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ ist streng monoton fallend. Argumentieren Sie, dass daraus die Konvergenz beider Teilfolgen gegen je einen Grenzwert g^* bzw. u^* folgt.
Hinweis: kein Induktionsargument.

e) Berechnen Sie g^* und u^* und verifizieren Sie, dass sie identisch sind, $g^* = u^* = a^*$. (a^* ist irrational.)

f) Wegen c) weist die ursprüngliche Folge (a_n) ein oszillierendes Verhalten auf. Ist (a_n) konvergent? (Begründung!) Wie lautet ihr Grenzwert?

Bevor man Aufgabe 8 und 9 angeht, sollte man Aufgabe 7 verstanden und gelöst haben.

8. a) Die *Fibonacci-Folge* (F_n) ist rekursiv definiert gemäß

$$F_1 := 1, \quad F_2 := 1, \qquad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n \quad \text{für } n \geq 1.$$

(F_n) ist streng monoton wachsend und offenbar unbeschränkt: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$.

Beweisen Sie, dass (F_n) tatsächlich unbeschränkt ist.
Hinweis: Induktionsargument.

b) Zeigen Sie: Die Folge (a_n) aus Aufgabe 7 ist genau die Folge der Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen, d.h. $a_n = F_{n+2}/F_{n+1}$, $n \geq 0$.

c) Die algebraisch irrationale Zahl $a^* =: \Phi = \ldots = 2\cos(\frac{\pi}{5})$ aus Aufgabe 7 heißt *Goldener Schnitt.* Man denke sich ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b, $a > b$, und teile es in ein Quadrat mit Seitenlänge b und ein kleineres Rechteck mit Seitenlängen b und $a - b$. Dann sind das ursprüngliche Rechteck und das kleine Rechteck ähnlich (gleiche Längenverhältnisse) genau dann wenn $\frac{a}{b} = \Phi \, (= \frac{b}{a-b})$. Verifizieren Sie das.

Anmerkung: Man kann für die F_n (und daher auch für die a_n) einen expliziten Formelausdruck angeben: Es gilt

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Herleitung dieser Formel steht jedoch hier nicht zur Debatte.

9. Die (algebraisch irrationale) Folge (b_n) sei definiert über die 'Kettenwurzelentwicklung' (*continued root*)

$$b_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

d.h. $b_0 = 1$, $b_1 = \sqrt{2}$, $b_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$, ...

a) Geben Sie für die b_n eine Rekursionsformel der Gestalt $b_n = \psi(b_{n-1})$ an ($n \geq 1$). Wie lautet die Funktion ψ?

b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n < \Phi$ (Goldener Schnitt, siehe Aufgabe 7 und 8.).
Hinweis: Induktionsargument.

c) Folgern Sie aus b): Die Folge (b_n) ist streng monoton wachsend.
Hinweis: kein Induktionsargument.

d) Die Folge (b_n) ist daher konvergent. Wie lautet ihr Grenzwert?

10. Ein Anwendungsproblem: Parktarif.

a) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$ uns skizzieren Sie die Graphen von

$$f(x) = \operatorname{sign}(x^2) \qquad \text{und} \qquad g(x) = [2x - 1],$$

wobei $[x]$ die Gauß-Klammer-Funktion bezeichnet.

b) Eine Stadtverwaltung muss sich zwischen zwei Tarifen für Parkgebühren entscheiden.
Tarif 1: Je 20 angefangene Minuten Parkzeit kosten 0.30 €.
Tarif 2: Je 30 angefangene Minuten Parkzeit kosten 0.50 €.

(i) Stellen Sie die Funktionen, die zu den beiden Tarifen gehören, bis zu einer Parkzeit von 3 Stunden grafisch dar (Tarif als Funktion der Parkdauer).

(ii) Für welche Parkzeit (bis zu 3 Stunden) ist *Tarif 2* günstiger?

1. Berechnen Sie den Wert der verallgemeinerten geometrischen Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k\, q^k$$

als Formelausdruck in n, mittels Zurückführung auf die einfache geometrische Summe. (Für die Zwischenrechnung ist es am übersichtlichsten, ... - Notation zu verwenden. Schreiben Sie das ganze in Form eines 'zweidimensionalen' Schemas an. Es ist auch hilfreich, zunächst einen speziellen Wert für n zu betrachten, z.B. $n = 5$.)

Zeigen Sie weiters, dass die verallgemeinerte geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k$$

für $|q| < 1$ konvergiert, und geben Sie auch ihren Wert an. (Siehe Übung 2.)

2. Ein punktförmiges Insekt krabbelt [1.] in 1 s 1 m vorwärts, dann [2.] in $\frac{1}{2}$ s $\frac{2}{2}$ m rückwärts, dann [3.] in $\frac{1}{4}$ s $\frac{3}{4}$ m vorwärts, dann [4.] in $\frac{1}{8}$ s $\frac{4}{8}$ m rückwärts, dann [5.] in $\frac{1}{16}$ s $\frac{5}{16}$ m vorwärts, dann [6.] in $\frac{1}{32}$ s $\frac{6}{32}$ m rückwärts, usw. usw. In welcher (endlichen) Zeitspanne konvergiert diese Bewegung gegen welche Endposition?

3. *Partielle Summation* (ein diskretes Analogon zur partiellen Integration):

Gegeben seien zwei Folgen (a_n) und (b_n). Schreiben Sie den Ausdruck

$$a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

in Form einer Teleskopsumme, und beweisen Sie davon ausgehend die Formel für die partielle Summation,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;=\; a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \;-\; \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\, (b_{k+1} - b_k).$$

Falls $(a_n\, b_n)$ eine Nullfolge ist, ergibt sich daraus rein formal

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;=\; -a_1\, b_1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}\, (b_{k+1} - b_k).$$

Ist dann die Konvergenz der Reihe links bzw. rechts gesichert, oder benötigt man dafür zusätzliche Voraussetzungen?

Verwenden Sie dies, um nochmals $\sum_{k=1}^{n} k\, q^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k$ zu berechnen.

Hinweis: Schreiben Sie q^k in der Form $q^k = a_{k+1} - a_k$ mit geeignetem a_k.

4. Zeigen Sie: Für $|q| < 1$ und beliebiges $p \in \mathbb{N}$ ist die verallgemeinerte geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^p\, q^k$$

absolut konvergent.

Anmerkung: Man könnte den Wert der Reihe in ähnlicher Weise wie in Aufgabe 3 berechnen (mittels mehrfacher partieller Summation).

5. Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!'} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{144} + \tfrac{1}{840} + \tfrac{1}{5760} + \tfrac{1}{45360} + \tfrac{1}{403200} + \tfrac{1}{3991680} + \tfrac{1}{43545600} + \tfrac{1}{518918400} + \dots$$

Das Symbol $k!'$ steht für $k!' = \prod_{\ell=1;\, \ell\neq k-1}^{k} \ell$ (ohne Faktor $k-1$).

Hinweis: Fernrohr.

6. Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k-\sqrt{k}}$$

bedingt bzw. absolut konvergiert.

7. Die Funktion $f(x)$ sei durch eine unendliche Reihe definiert:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} x^k \,.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion wohldefiniert (mit einem endlichen Wert)?

8. Gegeben seien die Folgen $(a_k) = (2^{-k})$ und $(b_k) = (3^{-k})$. Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sind konvergente geometrische Reihen. Bestimmen den Wert der zugehörigen Cauchy'schen Produktreihe auf 2 Arten.

9. Weisen Sie nach, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

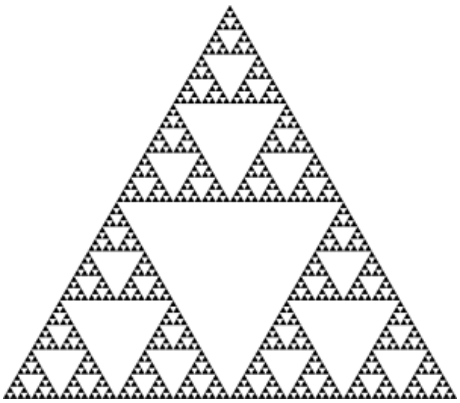
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

stetig ist. (Insbesondere: $x = 0$ ist eine hebbare Unstetigkeitsstelle.)

Hinweis: Geeignet umformen, so dass sich an der Stelle $x = 0$ nicht mehr der undefinierte Wert '0/0' ergibt.

10. Flächeninhalt des Szierpinski-Dreiecks (ein fraktales Objekt):

Ein gegebenes Dreieck Δ mit Eckpunkten A, B, C wird in 4 kleinere, zu Δ ähnliche Dreiecke unterteilt, die dadurch entstehen, dass man die Seiten von Δ in der Mitte teilt und diese 3 Punkte als neue Eckpunkte für die kleineren Dreiecke verwendet. Dieser Prozess wird rekursiv fortgesetzt, siehe Skizze (diese zeigt den Spezialfall eines gleichseitigen Dreiecks).



In dieser Weise erzeugt man eine Folge von immer kleineren, zu Δ ähnlichen Dreiecken ∇_k, die in der Skizze weiß erscheinen (1 kleines ∇, 3 noch kleinere ∇'s, 9 noch noch kleinere ∇'s, ...). Wenn man sich diesen Prozess 'unendlich oft' fortgesetzt denkt – gegen welchen Wert konvergiert die Summe der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke ∇_k (im Vergleich zur Fläche des gegebenen Dreiecks Δ)?

1. Zeigen Sie:

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf jedem beschränkten Intervall $[a, b]$ Lipschitz-stetig.

b) Zeigen Sie: Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig.

c) Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig ☺, aber nicht Lipschitz-stetig ☹, siehe Skriptum. Vollziehen Sie den Beweis nach und argumentieren Sie, dass gilt: Es gibt eine Konstante $H > 0$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq H\,|x_1 - x_2|^{\kappa} \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in [0, 1],$$

mit $H > 0$ und $\kappa \in (0, 1]$. Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Hölder-Stetigkeit*. Wie lauten die Konstanten H und κ für $\sqrt{x}$ auf $[0, 1]$?

Anmerkung: Hölder-Stetigkeit mit $\kappa = 1$ bedeutet Lipschitz-Stetigkeit (mit $L = H$). Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig (warum?).

2. Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \frac{2 + x^2}{1 + 2\,x^2}$$

ist streng monoton wachsend für $x < 0$ und streng monoton fallend für $x > 0$.

Der Graph von f ist eine Art Glockenkurve, mit $f(0) = 2$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.

3. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ aus UE 3 / Aufgabe 9,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$$

injektiv ist, und geben Sie die auf $f((-1, 1))$ definierte Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ an.

4. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$$

a) Zeigen Sie die Stetigkeit von f an $x = 1$ mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums. Geben Sie ein passendes δ für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ an.

b) Zeigen Sie die Stetigkeit von f an $x = 1$ mit Hilfe der Charakterisierung durch Folgen.

5. Bestimmen Sie alle Werte $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die folgenden Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, und skizzieren Sie diese.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\,x + 4 & \text{für} \quad x < a \\ -3\,x^2 + 6\,x + 12 & \text{für} \quad x \geq a \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{für} \quad -2 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{sonst} \end{cases}$

6. An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig bzw. unstetig? Charakterisieren Sie den Typ der Unstetigkeitsstellen und skizzieren Sie die Funktionen.

a) $f(x) = [x] + [-x]$

b) $f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sign} x}{x-5}\right)^2, \quad x \neq 5$

7. Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + a\,x + 6}{(x-2)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4\,x + a}{x^2 - 1}$

8. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 + x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f auf den folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Maximum, ein Supremum, ein Minimum, ein Infimum annimmt, und geben Sie diese gegebenenfalls an:

a) $A_1 = [-3, -1]$

b) $A_2 = [-1, 2]$

c) $A_3 = (0, 1]$

d) $A_4 = (-2, 0)$

e) $A_5 = [0, +\infty)$

f) $A_6 = (-\infty, +\infty)$

9. Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

(i) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ besitzt in $[a,b]$ mindestens einen *Fixpunkt* $x^* \in [a,b]$, d.h. $x^* \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $x^* = f(x^*)$.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g(x) = x - f(x)$ an.

(ii) f sei sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$ (eine sogenannte *Kontraktion*). Zeigen Sie: Der Fixpunkt x^* ist eindeutig. Geben Sie auch ein konkretes Beispiel an.

10. Ein Anwendungsproblem:

Sabine wandert in drei Stunden am Vormittag von Adorf nach Bstadt (stellen Sie sich eine geradlinig verlaufende Straße vor, aber das ist im Prinzip egal). In Bstadt macht Sie Mittagspause. Am Nachmittag wandert sie in drei Stunden wieder nach Adorf zurück.

(i) Zeigen Sie: Es gibt mindestens eine Stelle x^* zwischen Adorf und Bstadt, die sie auf beiden Wanderungen nach der gleichen Zeitspanne t^* erreicht.

(ii) Angenommen, Sabine geht immer nur vorwärts in Richtung ihres Zieles, d.h., sie kehrt nie um und bleibt nie stehen. Zeigen sie: t^* und x^* sind eindeutig.

(iii) Angenommen, Sabine legt auf dem Hinweg oder auch auf dem Rückweg zwischendurch eine Pause ein ☎ (3 Möglichkeiten). In welchen Fällen bleibt die Aussage aus (ii) bezüglich der Eindeutigkeit von t^* bzw. von x^* sicher richtig, und wann nicht?

Anmerkung: Sabine wird als punktförmiges Subjekt gedacht (sozusagen als Massepunkt), das sich aus energetischen Gründen nur stetig bewegen kann. Adorf und Bstadt stellen wir uns als 'Punkte auf der Landkarte' vor. Skizzen sind hilfreich für die Lösung.

1. Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren $(x-a)(x-b)(x-c)$:

a) $x^3 + x^2 - 10\,x + 8$

b) $x^3 - (2+r)x^2 + (1+2\,r)x - r, \quad r \in \mathbb{R}$

Hinweis: Erraten sie jeweils eine der Nullstellen.

2. Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen:

a) $\dfrac{3\,x-3}{x^2+x-2}$ b) $\dfrac{2\,x^2+1}{(x-1)^2\,(x+2)}$

3. Geben Sie den korrekten Ansatz für die reelle und die komplexe Partialbruchzerlegung an:

a) $\dfrac{x^2-6\,x+9}{(x-3)^5}$ b) $\dfrac{x}{(x^4+10x^2+25)^2\,(x^2+4x+3)^3\,(x+1)}$

4. Man bestimme die Interpolationspolynome $p(x)$ vom Grad 3 zu den beiden Datensätzen

a) $p(0) = 1,\ p(1) = p(2) = p(3) = -1$

b) $p(0) = 3,\ p(1) = 0,\ p(2) = -1,\ p(3) = 0$

+ Auswertung an $x = \frac{1}{2}$.

5. Betrachten Sie die stetige Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ f(t) = (\lambda t)\,e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Für $\lambda > 0$ ist $f(t)$ streng monoton wachsend und bijektiv. Können Sie die Umkehrfunktion explizit angeben? (Wäre erstaunlich ...)

b) Für $\lambda < 0$ ist $f(t)$

- streng monoton fallend auf $[0, \frac{1}{|\lambda|})$,
- streng monoton wachsend auf $(\frac{1}{|\lambda|}, \infty)$.

Für die Präsentation eines elementaren Beweises dieser Tatsache (*ohne* Hilfsmittel aus der Differentialrechnung) gibt es Extra-Punkte (wäre auch erstaunlich ...). (Mit Hilfe der Ableitung ist der Beweis ganz einfach; VO, Kapitel 10.)

c) (*) Zeigen Sie für $\lambda < 0$: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Hinweis: Betrachten Sie z.B. zunächst die Folge $(f(t_n))$ mit $t_n = n \in \mathbb{N}$; siehe Übung 2, und verwenden Sie b).

d) Ähnliche Überlegungen wie aus b), c) gelten für die Funktionen $f_n\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ f_n(t) = (\lambda t)^n\,e^{\lambda t}$ ($\lambda < 0$ fest gewählt, $n \in \mathbb{N}$), und die Absolutwerte (Beträge) dieser Funktionen nehmen an den Stellen $\bar{t}_n = \frac{n}{|\lambda|}$ je ihren maximalen Wert M_n an. (Auch dies kann man mit Hilfe der Differentialrechnung zeigen.) Es gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{t}_n = \infty$. Berechnen Sie die Werte M_n und zeigen Sie, dass die M_n 'super-exponentiell' gegen ∞ konvergieren für $n \to \infty$. Erläutern Sie, was mit 'super-exponentiell' gemeint ist. (Dies ist kein Widerspruch zu $\lim\limits_{t\to\infty} f_n(t) = 0$ für festes n.)

6. a) Geben Sie eine Näherungsformel $g(x) = c_0 + c_1 x \approx \ln(1+x)$ für $x \in [0,\varepsilon]$ an, indem Sie die Werte $\ln(1)$ und $\ln(1+\varepsilon)$ linear interpolieren. (Dabei sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest, aber 'klein'.) Die Koeffizienten c_0 und c_1 hängen von ε ab. Wie lauten sie?

Anmerkung: Um diese lineare Approximationsfunktion in einem gegebenen Intervall $x \in [0,\varepsilon]$ zu verwenden zu können, benötigt man einen einzigen Funktionswert an der festen Stelle $x = \varepsilon$, den man sich extra verschafft.

b) Eine weitere einfache lineare Approximation für $\ln(1+x)$ in der Nähe von $x = 0$ lautet $\ln(1+x) \approx x$, das ist genau die Tangente an den Graphen von $\ln(x)$ an der Stelle $x = 0$. Diskutieren Sie den Unterschied in der Genauigkeit der beiden Approximationen a) und b) in Abhängigkeit von x, indem sie eine Skizze erstellen. Argumentieren Sie 'anschaulich' aufgrund Ihrer Skizze.

(Für beide Fälle können rigorose Fehlerabschätzungen angegeben werden, die wir hier jedoch hier nicht diskutieren.)

7. Exponentialreihe, exponentielles Wachstum:

a) Der Beginn der Exponentialreihe, mit festem $n \in \mathbb{N}$,

$$e^u \approx E_n(u) := 1 + u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^n}{n!}$$

liefert eine Approximation für e^u, die für 'kleines' u sinnvoll ist (immer genauer für immer kleineres $|u|$). Für $u < 0$ handelt es sich um eine alternierende Reihe. Für welche $n \in \mathbb{N}$ und $u < 0$ können Sie eine rigorose Abschätzung für den Fehler $|E_n(u) - e^u|$ angeben? (Siehe VO, Kapitel 5.) [1]

b) Eine zeitabhängige Größe $X = X(t)$ gehorche dem Gesetz $X(t) = e^{\lambda t}$, $t \geq 0$, mit der Aufklingrate $\lambda > 0$. (Die Zeit messen wir in Sekunden [s], dann hat λ die Dimension 'pro Sekunde', also [s^{-1}].)

Sei $t \geq 0$ irgendein Zeitpunkt. Nach wie vielen weiteren Sekunden Δt erhöht sich der Wert von X um 1 % ('Plus 1 % - Zeit') bzw. 100 % ('Doppelwertzeit')? Ist das Ergebnis von t abhängig?

Berechnen Sie auch numerische Werte für Δt für den Fall $\lambda = 1000$. Es gilt $\ln 2 \approx 0.693\ldots$. Berechnen Sie für den anderen benötigten Wert des Logarithmus, $u = \ln(1 + x)$, mit x nahe an 0, eine Näherung unter Verwendung von a), und zwar so, dass Sie u mittels Lösung einer quadratischen Gleichung bestimmen können. Vergleichen Sie diese Approximation mit einem 'genauen' Wert (Taschenrechner) und mit der Approximation $\ln(1 + x) \approx x$ (siehe Aufgabe 6).

8. a) Zeigen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für den Kosinus:

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) \;=\; \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}\big(\cos(2\,\alpha) + \cos(2\,\beta)\big)\,.$$

b) (*) Zeigen Sie mit Hilfe von a): Definiert man eine Folge von Polynomen $T_n(x)$ vom Grad n durch $T_0(x) := 1$, $T_1(x) := x$, und rekursiv

$$T_n(x) := 2\,x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

so erhält man für $x \in [-1, 1]$ die Funktionen [2]

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Die $T_n(x)$ heißen *Chebyshev-Polynome 1. Art.* (Diese spielen eine prominente Rolle in der Theorie der Approximation reeller Funktionen durch Polynome.)

Hinweis: Zeigen Sie induktiv, dass für $x = \cos\varphi \in [-1, 1]$ die Folge $(\cos(n\,\varphi))$ tatsächlich der angegebenen Rekursion genügt. Wählen Sie α und β in Abhängigkeit von n und φ so, dass Sie für das Induktionsargument auf a) zurückgreifen können.

9. Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\omega \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

in der Form

$$f(t) = A\,\sin(\omega t - \varphi) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = A\,\cos(\omega t - \psi)$$

mit passenden $A \geq 0$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. Geben Sie explizit an, wie die *Amplitude* A und die *Phasenverschiebung* φ bzw. ψ mit a und b zusammenhängen.

10. Ein bisschen Fehlerrechnung mit trigonometrischen Größen (numerische Auswertungen mittels Rechner):

Der altgriechische Gelehrte Aristarch versuchte festzustellen, um wieviel die Sonne von der Erde weiter entfernt ist als der Mond. Die trigonometrischen Funktionen waren zwar noch nicht erfunden, aber dennoch gelang es ihm, folgende Idee rechnerisch umzusetzen: Bei Halbmond bilden Erde (♁), Mond (☾) und Sonne (☉) ein rechtwinkeliges Dreieck (überlegen Sie). Aristarch peilte in sein Observatorium, eilte mit seinem Teleskop ☾ und ☉ an, und vermaß den Winkel φ zwischen den Strahlen $\overline{♁☾}$ und $\overline{♁☉}$.

(i) Es bezeichne r den Abstand zwischen ♁ und ☾, und R den Abstand zwischen ♁ und ☉. Geben Sie eine Formel für das Verhältnis R/r in Abhängigkeit von der Messgröße φ an. (Wir wissen natürlich mit trigonometrischen Funktionen umzugehen.)

Aristarchs Messung ergab $\varphi \approx 87°$. Welches Verhältnis R/r errechnet sich daraus?

(ii) Die Messung war nicht sehr genau. Angenommen, Sie wissen, dass Aristarch einen kleinen Messfehler von maximal $\pm\Delta\varphi$ Grad begangen hat – welchen Einfluss hat dies auf den daraus resultieren Wert für R/r?

(iii) Tatsächlich gilt $\varphi \approx 89.853°$. Um welchen Faktor hat sich Aristarch verschätzt?

(Verwenden Sie die Fehlerschätzung aus b) und vergleichen Sie diese mit dem genauen, aus $\varphi \approx 89.853°$ gewonnenen Wert für R/r.)

(*): Etwas höherer Schwierigkeitsgrad.

[1] Für Werte u weiter weg von 0 ist das keine sehr effiziente Approximationsmethode für e^u. Sie führt auch zu einem *computational disaster* (Rundungsfehler am Computer machen die Approximation kaputt). Es gibt wesentlich bessere Verfahren.

[2] Die Funktionen $\cos(n \arccos x)$ sehen nicht aus wie Polynome, sind aber tatsächlich Polynome, wie der Beweis zeigt. Sie sind auch für $x \notin [-1, 1]$ wohldefiniert, aber dafür benötigt man die komplexen Erweiterungen von cos und arccos (siehe 'Analysis II'). Eine rein reelle explizite Darstellung der $T_n(x)$ sieht anders aus.

1. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \tan x$ mit Hilfe der Definition als Grenzwert von Differenzenquotienten.

2. Berechnen Sie jeweils die Ableitung $f'(x)$ der gegebenen Funktion $f(x)$:

a) $f(x) = \ln(\arctan x)$

b) $f(x) = \arcsin(1 - x^2)$

c) $f(x) = \arctan(e^x)$

d) $f(x) = \ln(\ln(1 - e^x))$

3. Wie stark ändert sich in erster Näherung (lineare Approximation) die Fläche eines Kreises, wenn sein Radius R um ein kleines Inkrement ΔR verändert wird?

4. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen jene Intervalle, auf denen sie monoton sind und bestimmen Sie weiters möglichst große Intervalle, auf denen diese Funktionen Lipschitz-stetig sind:

a) $f(x) = \dfrac{x^5}{3} - \dfrac{x^3}{3} - 6x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

5. Bestimmen Sie k derart, dass

a) $\sqrt{2x^2 - 1} = kx + \mathcal{O}(1)$ für $x \to \infty$

b) $(1 + u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + ku^2 + \mathcal{O}(u^4)$ für $u \to 0$

Hinweis: Linearisierung.

6. Ermitteln Sie für die rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+3}$ den maximalen Definitionsbereich und bestimmen Sie die Art der Unstetigkeitsstellen. Finden Sie die Nullstellen und untersuchen Sie den Charakter der Extrema. Untersuchen Sie weiters das Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Stellen Sie die Geradengleichung der Asymptoten auf und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

7. Berechnen Sie jeweils die Tangente an die Kurve $(x, f(x))$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x_0 = \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = \sin x + \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$

8. Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Satzes im Skriptum über die Differentiation der inversen Funktion:

a) $f(x) = \arctan x$

b) $f(x) = \operatorname{arcosh} x$

9. Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x^3}}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln x$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - \sin x}{\sinh 2x - \sin 2x}$

10. Ein Anwendungsproblem:

Wie weit kann man bei optimalen Sichtverhältnissen von einem Turm der Höhe $h = 10$ m sehen, wenn die Erde als Kugel mit Radius $R = 6300$ km angenommen wird?

Frohe Weihnachten und alles Gute für 2012 !

1. a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

um die Stelle $x_0 = 0$ bis zum Glied 3. Ordnung (das Restglied ist dann $\mathcal{O}(|x|^4)$).

b) Führen Sie für $f(x)$ und seine Taylorapproximation 3. Grades je eine Kurvendiskussion durch und vergleichen Sie.

2. [Prüfungsbeispiel vom 16.12.2011] Führen Sie für die Funktion $f(x) = x^4\,(1-x)$ eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Hinweis: Besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = 0$.

3. Führen Sie für die Funktion $f(x) = e^{-1/x^2}$ eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Hinweis: Ganz besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = 0$.

4. Führen Sie für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}$$

eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Hinweis: Die exakte Bestimmung der Wendepunkte ist nicht einfach zu bewerkstelligen. Versuchen Sie die Lage wenigstens eines der Wendepunkte aufgrund Ihrer Skizze zu schätzen, und verbessern Sie diesen Näherungswert unter Zuhilfenahme des Newton-Verfahrens (Taschenrechner).

5. Konstruieren Sie eine (möglichst einfach gebaute) rationale Funktion $R(x)$ mit einem Pol 2. Ordnung an $x = 1$ (sonst keine Pole), einem Wendepunkt ($f''(x) = 0$) an der Stelle $x = 4$, einer doppelten Nullstelle (irgendwo), und der Eigenschaft $\lim_{x\to\infty} = 2$. Überprüfen Sie Ihre Lösung dahingehend, ob $x = 4$ tatsächlich ein Wendepunkt ist.

Hinweis: Ansatz in Form der Partialbruchzerlegung.

6. Ein dünner langer Baumstamm schwimmt einen Kanal der Breite von a m Breite entlang. An einer Stelle geht es ums Eck (rechtwinkelige Bauweise, 90°), und nach dem Eck ist der Kanal b m breit. Wie lang darf ein Baumstamm höchstens sein, damit er sich nicht verhakt?

7. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der einfachsten Differenzen-Approximationen für die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$:

a) Einseitiger Differenzenquotient:
Für zweimal stetig differenzierbares f gilt

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \mathcal{O}(h) \quad \text{für } h \to 0.$$

b) Symmetrischer Differenzenquotient:
Für dreimal stetig differenzierbares f gilt

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h} = f'(x) + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{für } h \to 0.$$

(Hinweis: Taylor-Entwicklung.) Geben Sie Darstellungen für die $\mathcal{O}(h)$- bzw. $\mathcal{O}(h^2)$-Fehlerterme an. In welcher Weise hängt der jeweilige Fehler vom Verhalten der Funktion f ab?

8. Beim 'gedämpften' Newton-Verfahren zur Lösung einer nichtlinearen Gleichung $f(x) = 0$ versucht man, den Einzugsbereich zu vergrößern, indem man einen Dämpfungsparameter $\lambda \in (0,1)$ verwendet, um 'Überschießen' zu verhindern (vgl. das Beispiel $f(x) = \arctan x$ aus der Vorlesung).

Konkret:

$$x_{n+1} := g(x_n;\lambda) \quad \text{mit} \quad g(x) = x - \lambda\,\frac{f(x)}{f'(x)}$$

(ggf. auch mit geeignet variierendem $\lambda = \lambda_n$).

a) Interpretieren Sie das geometrisch, im Vergleich zum normalen Newton-Verfahren ($\lambda = 1$).

b) Zeigen Sie: Für hinreichend kleines λ gilt $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$, d.h. das Residuum $f(x)$ nimmt ab.

Hinweis: Linearisierung von $f(x)$ um die Stelle $x = x_n$ zeigt, dass das passen müsste. Um das Argument hieb- und stichfest zu machen, muss man sich das (quadratische) Restglied genauer ansehen (freiwillige Übung).[1]

c) Sei x^* eine einfache Nullstelle von f (d.h., $f'(x^*) = 0$). Wie lautet der Wert von $g'(x^*)$? Welches Konvergenzverhalten erwarten Sie für das gedämpfte Newton-Verfahren in der Nähe von x^*?

9. Wir basteln eine Sprungschanze, indem wir das Profil des Anlaufs (von der Seite gesehen) als Polynom $p(x)$ vom Grad 4 modellieren. Start oben bei $(x_0, y_0) = (0, 30)$ (der Sprungturm ist 30 m hoch), Absprung bei $(x_1, y_1) = (60, 0)$ (Anlauf ist 60 m lang, waagrecht gemessen). Weiters soll gelten $p'(x_0) = -\frac{1}{2}$ und $p'(x_1) = p''(x_1) = 0$.

Stellen Sie das Polynom $p(x)$ auf, das diesem Höhenprofil entspricht (Taschenrechner bzw. ein kleines Computerprogramm ist hier sinnvoll), und zeichnen Sie seinen Verlauf. Weist dieses Profil einen Wendepunkt auf, und wo befindet er sich?

10. Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_0^1 x^2\,dx\,,$$

indem Sie das Intervall $[0,1]$ in n Teilintervalle unterteilen, die entsprechende Riemann'sche Untersumme berechnen (siehe VO-Skriptum, Seite 168), und dann $n \to \infty$ gehen lassen. Rechnen Sie das auch mit Hilfe der Obersummen.

[1] Annahmen: $|f'(x)| \geq C > 0$ für alle x, und $f(x)$ ist zweimal stetig differenzierbar.

Anmerkung: Die Aufgaben 8 und 9 beziehen sich auf Kapitel 14 der Vorlesung, das voraussichtlich erst in der letzten Semesterwoche besprochen wird. Sie sind dennoch inkludiert, da es sich um potentiellen Stoff für die Vorlesungsprüfung handelt.

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$ b) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, dx$

2. Das Polynom $P_n(x) := \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n$ heißt n-tes *Legendre-Polynom* (Grad n).

Zeigen Sie

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$.

Hinweis: Mehrfache partielle Integration.

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx$

Hinweis zu b): Mit welcher Substitution wird aus der Wurzel etwas Nettes?

4. Berechnen Sie die Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{9\,x}{(x-1)^2\,(x+2)} \, dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin x}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx$

(b): kleiner Faschingsscherz.)

5. Berechnen Sie

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x (x - t) \sin(t^2) \, dt \,,$$

ohne das Integral auszurechnen (es ist nicht elementar bestimmbar).

6. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \, \ln x}$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} \, dx$

Dabei gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder man kann die Stammfunktion angeben und damit argumentieren, oder man verwendet eine geeignetes Vergleichskriterium (siehe Vorlesung).

7. Die *Gammafunktion* ist für $x > 0$ definiert über das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt\,.$$

a) Zeigen Sie, dass dieses uneigentliche Integral für jedes $x > 0$ konvergiert.

b) Zeigen Sie

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Hinweis: Leiten Sie für das von n abhängige Integral eine Rekursionsformel her.

8. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

bezüglich der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

Wie groß ist der Konvergenzradius? Konvergiert die Reihe innerhalb des Konvergenzintervalls tatsächlich gegen die Funktion $f(x)$?

Hinweis: Die Bestimmung als Taylorreihe mittels Berechnung aller Ableitungen von $f(x)$ an $x = 0$ macht nicht viel Spass. Besser: Führen Sie die gesuchte Entwicklung auf eine bekannte Reihe zurück.

9. Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2}$$

mittels bestimmter Integration einer geeigneten Potenzreihe über ein geeignetes Intervall.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 8.

10. Ein Anwendungsproblem:

a) Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation des Graphen einer Funktion $f(x)$ um die x-Achse ($a \le x \le b$). Geben Sie eine Formel für das Volumen des Rotationskörpers an, und zwar in Form eines Integrals

$$\int_a^b r(x)\, dx\,.$$

Hinweis: Machen Sie eine Skizze und überlegen Sie, für welche Funktion r (in Abhängigkeit von f) die Riemann-Summen von r gegen das gesuchte Volumen konvergieren. So erhalten Sie die gesuchte Formel. Simpler ausgedrückt: Man stellt sich vor, dass sich der Rotationskörper aus 'unendlich vielen, unendlich dünnen Kreisscheiben' zusammensetzt.

b) Ein etwas zerquetschter Faschingskrapfen entsteht durch Rotation der Kurve $y = \cos x$ um die x-Achse ($-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$). Berechnen Sie sein Volumen.