1. Wie lautet die logische Negation der folgenden Aussage?

Es gibt keine Stadt, in der keine Person existiert,
die nicht alle Primzahlen kennt.

Formulieren Sie die negierte Aussage mittels möglichst weniger Verneinungen. Schreiben Sie alles auch in formal-logischer Notation an (mit Quantoren, etc.).

Ist die Aussage *de facto* wahr, falsch, oder unentscheidbar?

2. Beweisen Sie die folgende bekannte Aussage:

Eine natürliche Zahl n ist durch 3 teilbar,
falls die Summe ihrer Dezimalziffern durch 3 teilbar ist.

(Es gilt auch die Umkehrung, der Beweis ist aber nicht Thema dieser Aufgabe.)

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $10 \le n < 100,\ 100 \le n < 1{,}000, \ldots$. So kommt man auf die Idee für den Beweis.

3. Beweisen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \right) = \frac{2n}{n+\frac{1}{2}} \,.$$

4. Stellen Sie eine Vermutung darüber auf, wie ein einfacher Formelausdruck in $n \in \mathbb{N}$ für den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\, k^2$$

aussieht (rechnen!), und beweisen Sie Ihre Vermutung.

5. Es seien $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ die 'Harmonischen Zahlen' (dafür gibt es keinen expliziten Formelausdruck). Stellen Sie den Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

mit Hilfe der Harmonischen Zahlen dar.

Hinweis: Substituieren Sie für den Index k in geeigneter Weise. (Substitution hilft manchmal bei der Berechnung von Summen, ähnlich wie bei der Substitutionsregel für Integrale.)

6. Berechnen Sie die Werte der Summen

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{n} n^{n-k}, \qquad \text{b)}\ 0.\underbrace{101010\ldots101010}_{2n \text{ Binärziffern } (n \text{ mal } '10')}$$

Der Ausdruck b) ist nicht als Dezimaldarstellung (bezüglich der Basis 10) sondern als Binärdarstellung (bezüglich der Basis 2) einer rationalen Zahl zu interpretieren. Geben Sie den Wert dieser Zahl als Bruch (in Dezimalnotation) an. Was passiert für $n \to \infty$?

7. a) Ein *Kettenbruch* ist ein Ausdruck der Gestalt

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots}}}$$

Schreiben Sie einen Computerprogramm, das zu gegebenen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ und $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{N}$ den Wert des Kettenbruches mittels einer Schleife berechnet (rationale Arithmetik). (Der Kettenbruch bricht bei b_n ab.)

b) Jede rationale Zahl lässt sich als endlicher (abbrechender) Kettenbruch darstellen. Es gibt auch unendliche Kettenbruchentwicklungen für irrationale Zahlen, z.B.

$$\sqrt{2} \;=\; 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

'Verifizieren' Sie diese Entwicklung mit ihrem Programm. Wie viele Terme benötigt man, um 10 Dezimalstellen von $\sqrt{2}$ korrekt zu erhalten?

8. Zeigen Sie folgende Identität für $n \in \mathbb{N}$:

$$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{F_n(k)\,(n-k)!}\,, \quad \text{mit} \quad F_n(k) := \prod_{j=1}^{k} nj\,.$$

9. a) Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen. Mit

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i$$

wird der Durchschnitt bzw. die Vereinigung aller dieser Mengen bezeichnet. Damit ist intuitiv klar, was gemeint ist; eine saubere mathematische Definition erfolgt jedoch in rekursiver Weise, basierend auf den vorgegebenen, bekannten Begriffen $\cap$ und $\cup$ für Durchschnitt und Vereinigung zweier Mengen. Geben Sie an, wie diese rekursive Definition aussieht.
Anmerkung: Man kann die Induktion mit $n = 1$ beginnen: $\bigcap_{i=1}^1 A_i = \bigcup_{i=1}^1 A_i = A_1$.

b) Alternativ dazu:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i := \{\, x \text{ mit der Eigenschaft } \ldots \,\}, \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i := \{\, x \text{ mit der Eigenschaft } \ldots \,\}$$

Verwenden Sie logische Quantoren, um dies präzise zu formulieren (vgl. $n = 2$), und zeigen Sie die Äquivalenz der Definitionen a) und b).

c) Geben Sie $\bigcap_{i=1}^n A_i$ und $\bigcup_{i=1}^n A_i$ an für $A_i = \{x \in \mathbb{N} \colon\, x \geq i\}$.

10. Ein Anwendungsproblem ('Hypercube'; einfach − es geht eigentlich nur um die korrekte Formalisierung):

Eine Anzahl von 2^n Orten in einem Bezirk A ist in folgender Weise durch Straßen miteinander verbunden: Zu jedem Ort gibt es genau n direkte Verbindungen zu n anderen Orten, und zwar in der Weise, dass maximal n Teilstrecken zu durchlaufen sind, um von irgendeinem Ort in A zu einem beliebigen anderen Ort in A zu gelangen.

In einem Nachbarbezirk B gibt es ebenfalls 2^n Orte, mit der gleichen Eigenschaft wie oben. Überlegen Sie, in welcher Weise Orte aus A mit Orten aus B direkt verbunden werden müssen, so dass der neue Gesamtbezirk $C = A + B$ (bestehend aus 2^{n+1} Orten) wiederum die analoge Eigenschaft hat: Zu jedem Ort in C gibt es genau $n+1$ direkte Verbindungen zu $n+1$ anderen Orten in C, und es sind maximal $n+1$ Teilstrecken zu durchlaufen, um von irgendeinem Ort in C zu einem beliebigen anderen Ort in C zu gelangen. (Eigentlich ist das ein Induktionsargument. Überprüfen Sie, dass auch der Induktionsanfang $n = 1$ realisierbar ist, sonst 'hängt' das Argument in der Luft.)[1]

Anmerkung: Mengentheoretisch gesehen ist ein 'Bezirk' A einfach eine endliche Menge, und die Orte sind ihre Elemente. Die Verbindungen zwischen den Orten (bidirektional, also keine Einbahnen) identifiziert man mit Elementen der Produktmenge $A \otimes A := \{\{a_1, a_2\} \colon a_1 \neq a_2 \in A\}$. Allgemein spricht man von einem (bidirektionalen) *Graphen* (N, K), mit *Knoten* $a \in N \subseteq A$ und *Kanten* $\{a_1, a_2\} \in K \subseteq A \otimes A$.

Visualisierung: z.B. eine dreidimensionale Welt (d.h. $A \subseteq \mathbb{R}^3$) und $n = 2$. Was fangen Sie mit dem Stichwort 'Hypercube' an (siehe oben)? (Denken Sie z.B. an eine 4-dimensionale Welt und $n = 3$.)

Die Notation $A+B$ verwendet man manchmal für die Vereinigung $A \cup B$ disjunkter Mengen ($A \cap B = \{\}$).

[1] Es gibt Beispiele von Aussagen, für die der Induktionsschluss funktioniert, die aber trotzdem falsch sind, weil der Induktionsanfang nicht klappt.