Anmerkung: Manche Aufgaben auf den Übungsblättern sind signifikant umfangreicher oder schwieriger als typische Testbeispiele. Abgesehen davon gilt der Stoff der ersten beiden Übungsblätter für den 1. Test am 11.11.2011.

1. Bestimmen Sie die reellen Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

a) $|x-4| \le 2x+3$ b) $|x-4| \ge |x-1|$

2. Gegeben seien die Abbildungen $f\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{3+2x}{1-x}$, und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2|x|$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D der Abbildung f.
b) Sind die Abbildungen f und g injektiv, surjektiv, bijektiv?
c) Wie ist der Definitionsbereich der Abbildungen f und g einzuschränken, damit sie injektiv werden?
d) Wie ist der Bildbereich der Abbildungen f und g zu verändern, damit sie surjektiv werden?
e) Bestimmen Sie durch geeignete Einschränkung von f und g die entsprechenden bijektiven Abbildungen und deren Umkehrabbildungen.

3. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \sqrt{2-x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

a) Bestimmen Sie die maximalen reellen Definitionsbereiche von f und g.
b) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ zusammen mit ihren maximalen reellen Definitionsbereichen.
c) Geben Sie die Abbildungen $f \circ f,\ \ f \circ f \circ f, \ldots,\ \ g \circ g,\ \ g \circ g \circ g,\ \ldots$ an. Was fällt Ihnen auf?

4. Betrachten Sie die unten angegebenen Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie jeweils die inneren und äußeren Punkte, sowie den Rand der Menge. Sind die Mengen offen und/oder abgeschlossen? Geben Sie die Häufungspunkte und die isolierten Punkte beider Mengen an.

a) $A = [1,4] \setminus (1,3)$ b) $B = [0,1) \cup (1,2]$

5. Zeigen Sie, dass für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$x \text{ ist Häufungspunkt von } A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ 0 < \varepsilon \le \bar\varepsilon:\ K_r(x,\varepsilon) \text{ enthält unendlich viele Punkte von } A,$$

wobei $\bar\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann. ($K_r(x,\varepsilon) = K(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$.)

6. Zeigen Sie: Für $|q| < 1$ ist die Folge (a_n), definiert durch $a_n := n\,q^n$, eine Nullfolge.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Folge $(|a_n|)$ für hinreichend großes n streng monoton fallend ist. Zur Bestimmung des Grenzwertes nützt man aus, dass gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.

Anmerkung: Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass für $|q| < 1$ auch jede Folge (a_n) mit $a_n = n^p\,q^n$ $(p \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge ist ('freiwillige' Übung).

7. Die (rationale Folge) (a_n) sei definiert über die Kettenbruchentwicklung (*continued fraction*, vgl. Übung 1)

$$a_n \;=\; 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

d.h. $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{2},\ \ldots$

a) Geben Sie für die a_n eine Rekursionsformel der Gestalt $a_n = \varphi(a_{n-1})$ an $(n \ge 1)$. Wie lautet die Funktion φ?
Hinweis: 'Hintenrum' denken.
b) Zeigen Sie: Für alle $n \ge 1$ gilt $a_n \in [\frac{3}{2}, 2]$. Die Folge ist also beschränkt.
Hinweis: Induktionsargument.
c) Die Folge (a_n) ist nicht monoton. Wir betrachten nun die Teilfolgen

$$(a_0, a_2, a_4, \ldots) \quad \text{und} \quad (a_1, a_3, a_5, \ldots)$$

Zeigen Sie: $a_{k-1} < \frac{1+\sqrt5}{2} < a_k$ für alle $k = 1, 3, 5, \ldots$
Hinweis: Induktionsargument. Die Zahl $\frac{1+\sqrt5}{2}$ ist die positive Wurzel (Lösung) der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$.

d) Folgern Sie aus c): $(a_0, a_2, a_4, \ldots)$ ist streng monoton wachsend, und $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ ist streng monoton fallend. Argumentieren Sie, dass daraus die Konvergenz beider Teilfolgen gegen je einen Grenzwert g^* bzw. u^* folgt. Hinweis: kein Induktionsargument.

e) Berechnen Sie g^* und u^* und verifizieren Sie, dass sie identisch sind, $g^* = u^* = a^*$. (a^* ist irrational.)

f) Wegen c) weist die ursprüngliche Folge (a_n) ein oszillierendes Verhalten auf. Ist (a_n) konvergent? (Begründung!) Wie lautet ihr Grenzwert?

Bevor man Aufgabe 8 und 9 angeht, sollte man Aufgabe 7 verstanden und gelöst haben.

8. a) Die *Fibonacci-Folge* (F_n) ist rekursiv definiert gemäß

$$F_1 := 1, \quad F_2 := 1, \qquad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n \quad \text{für } n \geq 1.$$

(F_n) ist streng monoton wachsend und offenbar unbeschränkt: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$.

Beweisen Sie, dass (F_n) tatsächlich unbeschränkt ist.
Hinweis: Induktionsargument.

b) Zeigen Sie: Die Folge (a_n) aus Aufgabe 7 ist genau die Folge der Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen, d.h. $a_n = F_{n+2}/F_{n+1}, \ n \geq 0$.

c) Die algebraisch irrationale Zahl $a^* =: \Phi = \ldots = 2\cos(\frac{\pi}{5})$ aus Aufgabe 7 heißt *Goldener Schnitt.* Man denke sich ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b, $a > b$, und teile es in ein Quadrat mit Seitenlänge b und ein kleineres Rechteck mit Seitenlängen b und $a - b$. Dann sind das ursprüngliche Rechteck und das kleine Rechteck ähnlich (gleiche Längenverhältnisse) genau dann wenn $\frac{a}{b} = \Phi \, (= \frac{b}{a-b})$. Verifizieren Sie das.

Anmerkung: Man kann für die F_n (und daher auch für die a_n) einen expliziten Formelausdruck angeben: Es gilt

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Herleitung dieser Formel steht jedoch hier nicht zur Debatte.

9. Die (algebraisch irrationale) Folge (b_n) sei definiert über die 'Kettenwurzelentwicklung' (*continued root*)

$$b_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

d.h. $b_0 = 1, \ b_1 = \sqrt{2}, \ b_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}, \ \ldots$

a) Geben Sie für die b_n eine Rekursionsformel der Gestalt $b_n = \psi(b_{n-1})$ an $(n \geq 1)$. Wie lautet die Funktion ψ?

b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n < \Phi$ (Goldener Schnitt, siehe Aufgabe 7 und 8.).
Hinweis: Induktionsargument.

c) Folgern Sie aus b): Die Folge (b_n) ist streng monoton wachsend.
Hinweis: kein Induktionsargument.

d) Die Folge (b_n) ist daher konvergent. Wie lautet ihr Grenzwert?

10. Ein Anwendungsproblem: Parktarif.

a) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{R})$ uns skizzieren Sie die Graphen von

$$f(x) = \operatorname{sign}(x^2) \qquad \text{und} \qquad g(x) = [2x - 1],$$

wobei $[x]$ die Gauß-Klammer-Funktion bezeichnet.

b) Eine Stadtverwaltung muss sich zwischen zwei Tarifen für Parkgebühren entscheiden.
Tarif 1: Je 20 angefangene Minuten Parkzeit kosten 0.30 €.
Tarif 2: Je 30 angefangene Minuten Parkzeit kosten 0.50 €.

(i) Stellen Sie die Funktionen, die zu den beiden Tarifen gehören, bis zu einer Parkzeit von 3 Stunden grafisch dar (Tarif als Funktion der Parkdauer).

(ii) Für welche Parkzeit (bis zu 3 Stunden) ist *Tarif 2* günstiger?