1. Berechnen Sie den Wert der verallgemeinerten geometrischen Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k\, q^k$$

als Formelausdruck in n, mittels Zurückführung auf die einfache geometrische Summe. (Für die Zwischenrechnung ist es am übersichtlichsten, ... - Notation zu verwenden. Schreiben Sie das ganze in Form eines 'zweidimensionalen' Schemas an. Es ist auch hilfreich, zunächst einen speziellen Wert für n zu betrachten, z.B. $n = 5$.)

Zeigen Sie weiters, dass die verallgemeinerte geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k$$

für $|q| < 1$ konvergiert, und geben Sie auch ihren Wert an. (Siehe Übung 2.)

2. Ein punktförmiges Insekt krabbelt [1.] in 1 s 1 m vorwärts, dann [2.] in $\frac{1}{2}$ s $\frac{2}{2}$ m rückwärts, dann [3.] in $\frac{1}{4}$ s $\frac{3}{4}$ m vorwärts, dann [4.] in $\frac{1}{8}$ s $\frac{4}{8}$ m rückwärts, dann [5.] in $\frac{1}{16}$ s $\frac{5}{16}$ m vorwärts, dann [6.] in $\frac{1}{32}$ s $\frac{6}{32}$ m rückwärts, usw. usw. In welcher (endlichen) Zeitspanne konvergiert diese Bewegung gegen welche Endposition?

3. *Partielle Summation* (ein diskretes Analogon zur partiellen Integration):

Gegeben seien zwei Folgen (a_n) und (b_n). Schreiben Sie den Ausdruck

$$a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

in Form einer Teleskopsumme, und beweisen Sie davon ausgehend die Formel für die partielle Summation,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;=\; a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \;-\; \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\, (b_{k+1} - b_k).$$

Falls $(a_n\, b_n)$ eine Nullfolge ist, ergibt sich daraus rein formal

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;=\; -a_1\, b_1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}\, (b_{k+1} - b_k).$$

Ist dann die Konvergenz der Reihe links bzw. rechts gesichert, oder benötigt man dafür zusätzliche Voraussetzungen?

Verwenden Sie dies, um nochmals $\sum_{k=1}^{n} k\, q^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k$ zu berechnen.

Hinweis: Schreiben Sie q^k in der Form $q^k = a_{k+1} - a_k$ mit geeignetem a_k.

4. Zeigen Sie: Für $|q| < 1$ und beliebiges $p \in \mathbb{N}$ ist die verallgemeinerte geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^p\, q^k$$

absolut konvergent.

Anmerkung: Man könnte den Wert der Reihe in ähnlicher Weise wie in Aufgabe 3 berechnen (mittels mehrfacher partieller Summation).

5. Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{30} + \frac{1}{144} + \frac{1}{840} + \frac{1}{5760} + \frac{1}{45360} + \frac{1}{403200} + \frac{1}{3991680} + \frac{1}{43545600} + \frac{1}{518918400} + \ldots$$

Das Symbol $k!'$ steht für $k!' = \prod_{\ell=1;\, \ell\neq k-1}^{k} \ell$ (ohne Faktor $k-1$).

Hinweis: Fernrohr.

6. Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \sqrt{k}}$$

bedingt bzw. absolut konvergiert.

7. Die Funktion $f(x)$ sei durch eine unendliche Reihe definiert:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} x^k .$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion wohldefiniert (mit einem endlichen Wert)?

8. Gegeben seien die Folgen $(a_k) = (2^{-k})$ und $(b_k) = (3^{-k})$. Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sind konvergente geometrische Reihen. Bestimmen den Wert der zugehörigen Cauchy'schen Produktreihe auf 2 Arten.

9. Weisen Sie nach, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

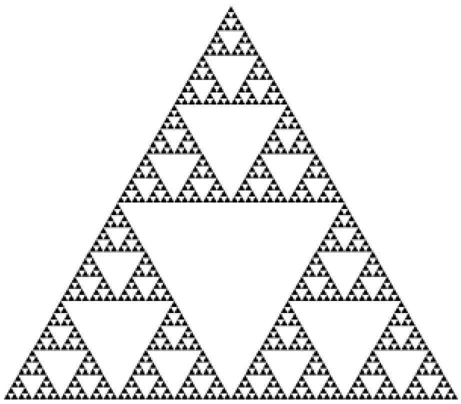
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

stetig ist. (Insbesondere: $x = 0$ ist eine hebbare Unstetigkeitsstelle.)

Hinweis: Geeignet umformen, so dass sich an der Stelle $x = 0$ nicht mehr der undefinierte Wert '0/0' ergibt.

10. Flächeninhalt des Szierpinski-Dreiecks (ein fraktales Objekt):

Ein gegebenes Dreieck Δ mit Eckpunkten A, B, C wird in 4 kleinere, zu Δ ähnliche Dreiecke unterteilt, die dadurch entstehen, dass man die Seiten von Δ in der Mitte teilt und diese 3 Punkte als neue Eckpunkte für die kleineren Dreiecke verwendet. Dieser Prozess wird rekursiv fortgesetzt, siehe Skizze (diese zeigt den Spezialfall eines gleichseitigen Dreiecks).



In dieser Weise erzeugt man eine Folge von immer kleineren, zu Δ ähnlichen Dreiecken ∇_k, die in der Skizze weiß erscheinen (1 kleines ∇, 3 noch kleinere ∇'s, 9 noch noch kleinere ∇'s, …). Wenn man sich diesen Prozess 'unendlich oft' fortgesetzt denkt − gegen welchen Wert konvergiert die Summe der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke ∇_k (im Vergleich zur Fläche des gegebenen Dreiecks Δ)?