---

1. Zeigen Sie:

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf jedem beschränkten Intervall $[a, b]$ Lipschitz-stetig.

b) Zeigen Sie: Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig.

c) Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig ☺, aber nicht Lipschitz-stetig ☹, siehe Skriptum. Vollziehen Sie den Beweis nach und argumentieren Sie, dass gilt: Es gibt eine Konstante $H > 0$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq H\,|x_1 - x_2|^\kappa \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in [0, 1],$$

mit $H > 0$ und $\kappa \in (0, 1]$. Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Hölder-Stetigkeit*. Wie lauten die Konstanten H und κ für $\sqrt{x}$ auf $[0, 1]$?

Anmerkung: Hölder-Stetigkeit mit $\kappa = 1$ bedeutet Lipschitz-Stetigkeit (mit $L = H$). Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig (warum?).

2. Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \frac{2 + x^2}{1 + 2\,x^2}$$

ist streng monoton wachsend für $x < 0$ und streng monoton fallend für $x > 0$.

Der Graph von f ist eine Art Glockenkurve, mit $f(0) = 2$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

3. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ aus UE 3 / Aufgabe 9,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$$

injektiv ist, und geben Sie die auf $f((-1, 1))$ definierte Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ an.

4. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$$

a) Zeigen Sie die Stetigkeit von f an $x = 1$ mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums. Geben Sie ein passendes δ für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ an.

b) Zeigen Sie die Stetigkeit von f an $x = 1$ mit Hilfe der Charakterisierung durch Folgen.

5. Bestimmen Sie alle Werte $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die folgenden Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, und skizzieren Sie diese.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\,x + 4 & \text{für} \quad x < a \\ -3\,x^2 + 6\,x + 12 & \text{für} \quad x \geq a \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{für} \quad -2 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{sonst} \end{cases}$

6. An welchen Stellen sind die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig bzw. unstetig? Charakterisieren Sie den Typ der Unstetigkeitsstellen und skizzieren Sie die Funktionen.

a) $f(x) = [x] + [-x]$

b) $f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sign} x}{x-5}\right)^2 , \quad x \neq 5$

7. Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + a\,x + 6}{(x-2)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4\,x + a}{x^2 - 1}$

8. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 + x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f auf den folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Maximum, ein Supremum, ein Minimum, ein Infimum annimmt, und geben Sie diese gegebenenfalls an:

a) $A_1 = [-3, -1]$

b) $A_2 = [-1, 2]$

c) $A_3 = (0, 1]$

d) $A_4 = (-2, 0)$

e) $A_5 = [0, +\infty)$

f) $A_6 = (-\infty, +\infty)$

9. Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

(i) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ besitzt in $[a,b]$ mindestens einen *Fixpunkt* $x^* \in [a,b]$, d.h. $x^* \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $x^* = f(x^*)$.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g(x) = x - f(x)$ an.

(ii) f sei sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$ (eine sogenannte *Kontraktion*). Zeigen Sie: Der Fixpunkt x^* ist eindeutig. Geben Sie auch ein konkretes Beispiel an.

10. Ein Anwendungsproblem:

Sabine wandert in drei Stunden am Vormittag von Adorf nach Bstadt (stellen Sie sich eine geradlinig verlaufende Straße vor, aber das ist im Prinzip egal). In Bstadt macht Sie Mittagspause. Am Nachmittag wandert sie in drei Stunden wieder nach Adorf zurück.

(i) Zeigen Sie: Es gibt mindestens eine Stelle x^* zwischen Adorf und Bstadt, die sie auf beiden Wanderungen nach der gleichen Zeitspanne t^* erreicht.

(ii) Angenommen, Sabine geht immer nur vorwärts in Richtung ihres Zieles, d.h., sie kehrt nie um und bleibt nie stehen. Zeigen sie: t^* und x^* sind eindeutig.

(iii) Angenommen, Sabine legt auf dem Hinweg oder auch auf dem Rückweg zwischendurch eine Pause ein ☎ (3 Möglichkeiten). In welchen Fällen bleibt die Aussage aus (ii) bezüglich der Eindeutigkeit von t^* bzw. von x^* sicher richtig, und wann nicht?

Anmerkung: Sabine wird als punktförmiges Subjekt gedacht (sozusagen als Massepunkt), das sich aus energetischen Gründen nur stetig bewegen kann. Adorf und Bstadt stellen wir uns als ‘Punkte auf der Landkarte’ vor. Skizzen sind hilfreich für die Lösung.