1. Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren $(x-a)(x-b)(x-c)$:

a) $x^3 + x^2 - 10\,x + 8$

b) $x^3 - (2+r)x^2 + (1+2\,r)x - r, \quad r \in \mathbb{R}$

Hinweis: Erraten sie jeweils eine der Nullstellen.

2. Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung folgender rationaler Funktionen:

a) $\dfrac{3\,x-3}{x^2+x-2}$ b) $\dfrac{2\,x^2+1}{(x-1)^2\,(x+2)}$

3. Geben Sie den korrekten Ansatz für die reelle und die komplexe Partialbruchzerlegung an:

a) $\dfrac{x^2-6\,x+9}{(x-3)^5}$ b) $\dfrac{x}{(x^4+10x^2+25)^2\,(x^2+4x+3)^3\,(x+1)}$

4. Man bestimme die Interpolationspolynome $p(x)$ vom Grad 3 zu den beiden Datensätzen

a) $p(0)=1,\ p(1)=p(2)=p(3)=-1$

b) $p(0)=3,\ p(1)=0,\ p(2)=-1,\ p(3)=0$

+ Auswertung an $x=\frac{1}{2}$.

5. Betrachten Sie die stetige Funktion $f\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty),\ f(t) = (\lambda t)\,e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Für $\lambda > 0$ ist $f(t)$ streng monoton wachsend und bijektiv. Können Sie die Umkehrfunktion explizit angeben? (Wäre erstaunlich ...)

b) Für $\lambda < 0$ ist $f(t)$

- streng monoton fallend auf $[0, \frac{1}{|\lambda|})$,
- streng monoton wachsend auf $(\frac{1}{|\lambda|}, \infty)$.

Für die Präsentation eines elementaren Beweises dieser Tatsache (*ohne* Hilfsmittel aus der Differentialrechnung) gibt es Extra-Punkte (wäre auch erstaunlich ...). (Mit Hilfe der Ableitung ist der Beweis ganz einfach; VO, Kapitel 10.)

c) (*) Zeigen Sie für $\lambda < 0$: $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Hinweis: Betrachten Sie z.B. zunächst die Folge $(f(t_n))$ mit $t_n = n \in \mathbb{N}$; siehe Übung 2, und verwenden Sie b).

d) Ähnliche Überlegungen wie aus b), c) gelten für die Funktionen $f_n\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty),\ f_n(t) = (\lambda t)^n\,e^{\lambda t}$ ($\lambda < 0$ fest gewählt, $n \in \mathbb{N}$), und die Absolutwerte (Beträge) dieser Funktionen nehmen an den Stellen $\bar{t}_n = \frac{n}{|\lambda|}$ je ihren maximalen Wert M_n an. (Auch dies kann man mit Hilfe der Differentialrechnung zeigen.) Es gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{t}_n = \infty$. Berechnen Sie die Werte M_n und zeigen Sie, dass die M_n 'super-exponentiell' gegen ∞ konvergieren für $n \to \infty$. Erläutern Sie, was mit 'super-exponentiell' gemeint ist. (Dies ist kein Widerspruch zu $\lim\limits_{t\to\infty} f_n(t) = 0$ für festes n.)

6. a) Geben Sie eine Näherungsformel $g(x) = c_0 + c_1 x \approx \ln(1+x)$ für $x \in [0,\varepsilon]$ an, indem Sie die Werte $\ln(1)$ und $\ln(1+\varepsilon)$ linear interpolieren. (Dabei sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest, aber 'klein'.) Die Koeffizienten c_0 und c_1 hängen von ε ab. Wie lauten sie?

Anmerkung: Um diese lineare Approximationsfunktion in einem gegebenen Intervall $x \in [0,\varepsilon]$ zu verwenden zu können, benötigt man einen einzigen Funktionswert an der festen Stelle $x = \varepsilon$, den man sich extra verschafft.

b) Eine weitere einfache lineare Approximation für $\ln(1+x)$ in der Nähe von $x=0$ lautet $\ln(1+x) \approx x$, das ist genau die Tangente an den Graphen von $\ln(x)$ an der Stelle $x=0$. Diskutieren Sie den Unterschied in der Genauigkeit der beiden Approximationen a) und b) in Abhängigkeit von x, indem sie eine Skizze erstellen. Argumentieren Sie 'anschaulich' aufgrund Ihrer Skizze.

(Für beide Fälle können rigorose Fehlerabschätzungen angegeben werden, die wir hier jedoch hier nicht diskutieren.)

7. Exponentialreihe, exponentielles Wachstum:

a) Der Beginn der Exponentialreihe, mit festem $n \in \mathbb{N}$,

$$e^u \approx E_n(u) := 1 + u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^n}{n!}$$

liefert eine Approximation für e^u, die für 'kleines' u sinnvoll ist (immer genauer für immer kleineres $|u|$). Für $u < 0$ handelt es sich um eine alternierende Reihe. Für welche $n \in \mathbb{N}$ und $u < 0$ können Sie eine rigorose Abschätzung für den Fehler $|E_n(u) - e^u|$ angeben? (Siehe VO, Kapitel 5.) [1]

b) Eine zeitabhängige Größe $X = X(t)$ gehorche dem Gesetz $X(t) = e^{\lambda\, t}$, $t \geq 0$, mit der Aufklingrate $\lambda > 0$. (Die Zeit messen wir in Sekunden [s], dann hat λ die Dimension 'pro Sekunde', also [s^{-1}].)

Sei $t \geq 0$ irgendein Zeitpunkt. Nach wie vielen weiteren Sekunden Δt erhöht sich der Wert von X um 1 % ('Plus 1 % - Zeit') bzw. 100 % ('Doppelwertzeit')? Ist das Ergebnis von t abhängig?

Berechnen Sie auch numerische Werte für Δt für den Fall $\lambda = 1000$. Es gilt $\ln 2 \approx 0.693\ldots$. Berechnen Sie für den anderen benötigten Wert des Logarithmus, $u = \ln(1 + x)$, mit x nahe an 0, eine Näherung unter Verwendung von a), und zwar so, dass Sie u mittels Lösung einer quadratischen Gleichung bestimmen können. Vergleichen Sie diese Approximation mit einem 'genauen' Wert (Taschenrechner) und mit der Approximation $\ln(1 + x) \approx x$ (siehe Aufgabe 6).

8. a) Zeigen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für den Kosinus:

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) \;=\; \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}\big(\cos(2\,\alpha) + \cos(2\,\beta)\big)\,.$$

b) (*) Zeigen Sie mit Hilfe von a): Definiert man eine Folge von Polynomen $T_n(x)$ vom Grad n durch $T_0(x) := 1$, $T_1(x) := x$, und rekursiv

$$T_n(x) := 2\,x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

so erhält man für $x \in [-1, 1]$ die Funktionen [2]

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Die $T_n(x)$ heißen *Chebyshev-Polynome 1. Art.* (Diese spielen eine prominente Rolle in der Theorie der Approximation reeller Funktionen durch Polynome.)

Hinweis: Zeigen Sie induktiv, dass für $x = \cos\varphi \in [-1, 1]$ die Folge $(\cos(n\,\varphi))$ tatsächlich der angegebenen Rekursion genügt. Wählen Sie α und β in Abhängigkeit von n und φ so, dass Sie für das Induktionsargument auf a) zurückgreifen können.

9. Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\omega \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

in der Form

$$f(t) = A\,\sin(\omega t - \varphi) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = A\,\cos(\omega t - \psi)$$

mit passenden $A \geq 0$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. Geben Sie explizit an, wie die *Amplitude* A und die *Phasenverschiebung* φ bzw. ψ mit a und b zusammenhängen.

10. Ein bisschen Fehlerrechnung mit trigonometrischen Größen (numerische Auswertungen mittels Rechner):

Der altgriechische Gelehrte Aristarch versuchte festzustellen, um wieviel die Sonne von der Erde weiter entfernt ist als der Mond. Die trigonometrischen Funktionen waren zwar noch nicht erfunden, aber dennoch gelang es ihm, folgende Idee rechnerisch umzusetzen: Bei Halbmond bilden Erde (♁), Mond (☾) und Sonne (⊙) ein rechtwinkeliges Dreieck (überlegen Sie). Aristarch peilte in sein Observatorium, eilte mit seinem Teleskop ☾ und ⊙ an, und vermaß den Winkel φ zwischen den Strahlen $\overline{\text{♁☾}}$ und $\overline{\text{♁⊙}}$.

(i) Es bezeichne r den Abstand zwischen ♁ und ☾, und R den Abstand zwischen ♁ und ⊙. Geben Sie eine Formel für das Verhältnis R/r in Abhängigkeit von der Messgröße φ an. (Wir wissen natürlich mit trigonometrischen Funktionen umzugehen.)
Aristarchs Messung ergab $\varphi \approx 87°$. Welches Verhältnis R/r errechnet sich daraus?

(ii) Die Messung war nicht sehr genau. Angenommen, Sie wissen, dass Aristarch einen kleinen Messfehler von maximal $\pm\Delta\varphi$ Grad begangen hat − welchen Einfluss hat dies auf den daraus resultieren Wert für R/r?

(iii) Tatsächlich gilt $\varphi \approx 89.853°$. Um welchen Faktor hat sich Aristarch verschätzt?
(Verwenden Sie die Fehlerschätzung aus b) und vergleichen Sie diese mit dem genauen, aus $\varphi \approx 89.853°$ gewonnenen Wert für R/r.)

(*) : Etwas höherer Schwierigkeitsgrad.

[1] Für Werte u weiter weg von 0 ist das keine sehr effiziente Approximationsmethode für e^u. Sie führt auch zu einem *computational disaster* (Rundungsfehler am Computer machen die Approximation kaputt). Es gibt wesentlich bessere Verfahren.

[2] Die Funktionen $\cos(n \arccos x)$ sehen nicht aus wie Polynome, sind aber tatsächlich Polynome, wie der Beweis zeigt. Sie sind auch für $x \notin [-1, 1]$ wohldefiniert, aber dafür benötigt man die komplexen Erweiterungen von cos und arccos (siehe 'Analysis II'). Eine rein reelle explizite Darstellung der $T_n(x)$ sieht anders aus.