---

1. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \tan x$ mit Hilfe der Definition als Grenzwert von Differenzenquotienten.

2. Berechnen Sie jeweils die Ableitung $f'(x)$ der gegebenen Funktion $f(x)$:

a) $f(x) = \ln(\arctan x)$

b) $f(x) = \arcsin(1 - x^2)$

c) $f(x) = \arctan(e^x)$

d) $f(x) = \ln(\ln(1 - e^x))$

3. Wie stark ändert sich in erster Näherung (lineare Approximation) die Fläche eines Kreises, wenn sein Radius R um ein kleines Inkrement ΔR verändert wird?

4. Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen jene Intervalle, auf denen sie monoton sind und bestimmen Sie weiters möglichst große Intervalle, auf denen diese Funktionen Lipschitz-stetig sind:

a) $f(x) = \dfrac{x^5}{3} - \dfrac{x^3}{3} - 6x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

5. Bestimmen Sie k derart, dass

a) $\sqrt{2x^2 - 1} = kx + \mathcal{O}(1)$ für $x \to \infty$

b) $(1 + u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + ku^2 + \mathcal{O}(u^4)$ für $u \to 0$

Hinweis: Linearisierung.

6. Ermitteln Sie für die rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x+3}$ den maximalen Definitionsbereich und bestimmen Sie die Art der Unstetigkeitsstellen. Finden Sie die Nullstellen und untersuchen Sie den Charakter der Extrema. Untersuchen Sie weiters das Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Stellen Sie die Geradengleichung der Asymptoten auf und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

7. Berechnen Sie jeweils die Tangente an die Kurve $(x, f(x))$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x_0 = \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = \sin x + \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$

8. Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Satzes im Skriptum über die Differentiation der inversen Funktion:

a) $f(x) = \arctan x$

b) $f(x) = \operatorname{arcosh} x$

9. Berechnen Sie mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x^3}}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln x$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - \sin x}{\sinh 2x - \sin 2x}$

10. Ein Anwendungsproblem:

Wie weit kann man bei optimalen Sichtverhältnissen von einem Turm der Höhe $h = 10$ m sehen, wenn die Erde als Kugel mit Radius $R = 6300$ km angenommen wird?

Frohe Weihnachten und alles Gute für 2012 !