**1.** a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

um die Stelle $x_0 = 0$ bis zum Glied 3. Ordnung (das Restglied ist dann $\mathcal{O}(|x|^4)$).

b) Führen Sie für $f(x)$ und seine Taylorapproximation 3. Grades je eine Kurvendiskussion durch und vergleichen Sie.

**2.** [ Prüfungsbeispiel vom 16.12.2011 ] Führen Sie für die Funktion $f(x) = x^4\,(1-x)$ eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Hinweis: Besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = 0$.

**3.** Führen Sie für die Funktion $f(x) = e^{-1/x^2}$ eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Hinweis: Ganz besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = 0$.

**4.** Führen Sie für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}$$

eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch. Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Hinweis: Die exakte Bestimmung der Wendepunkte ist nicht einfach zu bewerkstelligen. Versuchen Sie die Lage wenigstens eines der Wendepunkte aufgrund Ihrer Skizze zu schätzen, und verbessern Sie diesen Näherungswert unter Zuhilfenahme des Newton-Verfahrens (Taschenrechner).

**5.** Konstruieren Sie eine (möglichst einfach gebaute) rationale Funktion $R(x)$ mit einem Pol 2. Ordnung an $x = 1$ (sonst keine Pole), einem Wendepunkt ($f''(x) = 0$) an der Stelle $x = 4$, einer doppelten Nullstelle (irgendwo), und der Eigenschaft $\lim_{x\to\infty} = 2$. Überprüfen Sie Ihre Lösung dahingehend, ob $x = 4$ tatsächlich ein Wendepunkt ist.

*Hinweis:* Ansatz in Form der Partialbruchzerlegung.

**6.** Ein dünner langer Baumstamm schwimmt einen Kanal der Breite von $a$ m Breite entlang. An einer Stelle geht es ums Eck (rechtwinkelige Bauweise, 90°), und nach dem Eck ist der Kanal $b$ m breit. Wie lang darf ein Baumstamm höchstens sein, damit er sich nicht verhakt?

**7.** Zeigen Sie folgende Eigenschaften der einfachsten Differenzen-Approximationen für die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$:

a) Einseitiger Differenzenquotient:
Für zweimal stetig differenzierbares $f$ gilt

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \mathcal{O}(h) \quad \text{für } h \to 0.$$

b) Symmetrischer Differenzenquotient:
Für dreimal stetig differenzierbares $f$ gilt

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h} = f'(x) + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{für } \ h \to 0.$$

(Hinweis: Taylor-Entwicklung.) Geben Sie Darstellungen für die $\mathcal{O}(h)$ - bzw. $\mathcal{O}(h^2)$ - Fehlerterme an. In welcher Weise hängt der jeweilige Fehler vom Verhalten der Funktion $f$ ab?

**8.** Beim 'gedämpften' Newton-Verfahren zur Lösung einer nichtlinearen Gleichung $f(x) = 0$ versucht man, den Einzugsbereich zu vergrößern, indem man einen Dämpfungsparameter $\lambda \in (0,1)$ verwendet, um 'Überschießen' zu verhindern (vgl. das Beispiel $f(x) = \arctan x$ aus der Vorlesung).

Konkret:

$$x_{n+1} := g(x_n; \lambda) \quad \text{mit} \quad g(x) = x - \lambda\, \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(ggf. auch mit geeignet variierendem $\lambda = \lambda_n$).

a) Interpretieren Sie das geometrisch, im Vergleich zum normalen Newton-Verfahren ($\lambda = 1$).

b) Zeigen Sie: Für hinreichend kleines $\lambda$ gilt $|f(x_{n+1})| < |f(x_n)|$, d.h. das Residuum $f(x)$ nimmt ab.

Hinweis: Linearisierung von $f(x)$ um die Stelle $x = x_n$ zeigt, dass das passen müsste. Um das Argument hieb- und stichfest zu machen, muss man sich das (quadratische) Restglied genauer ansehen (freiwillige Übung).[1]

c) Sei $x^*$ eine einfache Nullstelle von $f$ (d.h., $f'(x^*) = 0$). Wie lautet der Wert von $g'(x^*)$? Welches Konvergenzverhalten erwarten Sie für das gedämpfte Newton-Verfahren in der Nähe von $x^*$?

**9.** Wir basteln eine Sprungschanze, indem wir das Profil des Anlaufs (von der Seite gesehen) als Polynom $p(x)$ vom Grad 4 modellieren. Start oben bei $(x_0, y_0) = (0, 30)$ (der Sprungturm ist 30 m hoch), Absprung bei $(x_1, y_1) = (60, 0)$ (Anlauf ist 60 m lang, waagrecht gemessen). Weiters soll gelten $p'(x_0) = -\frac{1}{2}$ und $p'(x_1) = p''(x_1) = 0$.

Stellen Sie das Polynom $p(x)$ auf, das diesem Höhenprofil entspricht (Taschenrechner bzw. ein kleines Computerprogramm ist hier sinnvoll), und zeichnen Sie seinen Verlauf. Weist dieses Profil einen Wendepunkt auf, und wo befindet er sich?

**10.** Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_0^1 x^2\, dx\,,$$

indem Sie das Intervall $[0, 1]$ in $n$ Teilintervalle unterteilen, die entsprechende Riemann'sche Untersumme berechnen (siehe VO-Skriptum, Seite 168), und dann $n \to \infty$ gehen lassen. Rechnen Sie das auch mit Hilfe der Obersummen.

[1] Annahmen: $|f'(x)| \geq C > 0$ für alle $x$, und $f(x)$ ist zweimal stetig differenzierbar.