Anmerkung: Die Aufgaben 8 und 9 beziehen sich auf Kapitel 14 der Vorlesung, das voraussichtlich erst in der letzten Semesterwoche besprochen wird. Sie sind dennoch inkludiert, da es sich um potentiellen Stoff für die Vorlesungsprüfung handelt.

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\,dx$ b) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$

2. Das Polynom $P_n(x) := \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ heißt n-tes *Legendre-Polynom* (Grad n).

Zeigen Sie

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$.

Hinweis: Mehrfache partielle Integration.

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ Hinweis zu b): Mit welcher Substitution wird aus der Wurzel etwas Nettes?

4. Berechnen Sie die Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{9\,x}{(x-1)^2\,(x+2)}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (b): kleiner Faschingsscherz.)

5. Berechnen Sie

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-t)\sin(t^2)\,dt\,,$$

ohne das Integral auszurechnen (es ist nicht elementar bestimmbar).

6. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\,\ln x}$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$

Dabei gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder man kann die Stammfunktion angeben und damit argumentieren, oder man verwendet eine geeignetes Vergleichskriterium (siehe Vorlesung).

7. Die *Gammafunktion* ist für $x > 0$ definiert über das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt \, .$$

a) Zeigen Sie, dass dieses uneigentliche Integral für jedes $x > 0$ konvergiert.

b) Zeigen Sie

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \, .$$

Hinweis: Leiten Sie für das von n abhängige Integral eine Rekursionsformel her.

8. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

bezüglich der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

Wie groß ist der Konvergenzradius? Konvergiert die Reihe innerhalb des Konvergenzintervalls tatsächlich gegen die Funktion $f(x)$?

Hinweis: Die Bestimmung als Taylorreihe mittels Berechnung aller Ableitungen von $f(x)$ an $x = 0$ macht nicht viel Spass. Besser: Führen Sie die gesuchte Entwicklung auf eine bekannte Reihe zurück.

9. Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2}$$

mittels bestimmter Integration einer geeigneten Potenzreihe über ein geeignetes Intervall.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 8.

10. Ein Anwendungsproblem:

a) Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation des Graphen einer Funktion $f(x)$ um die x-Achse ($a \le x \le b$). Geben Sie eine Formel für das Volumen des Rotationskörpers an, und zwar in Form eines Integrals

$$\int_a^b r(x) \, dx \, .$$

Hinweis: Machen Sie eine Skizze und überlegen Sie, für welche Funktion r (in Abhängigkeit von f) die Riemann-Summen von r gegen das gesuchte Volumen konvergieren. So erhalten Sie die gesuchte Formel. Simpler ausgedrückt: Man stellt sich vor, dass sich der Rotationskörper aus 'unendlich vielen, unendlich dünnen Kreisscheiben' zusammensetzt.

b) Ein etwas zerquetschter Faschingskrapfen entsteht durch Rotation der Kurve $y = \cos x$ um die x-Achse ($-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$). Berechnen Sie sein Volumen.