Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2012/13

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Nachtest (FR, 15.03.2013) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $\{a_n\}$, wobei $\boxed{a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}$

Geben Sie auch eine kurze Begründung für die Korrektheit Ihrer Herleitung an. *[a): 2 P.]*

Mit
$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
ergibt sich nach den Rechenregeln für konvergente Folgen:
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \cdot e^1 = 1$$
als Produkt zweier bekannter konvergenter Folgen.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\boxed{\sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{(k-m)!}}$?

Liegt auch absolute Konvergenz vor? Bitte begründen. *[b): 2 P.]*

Verwende Quotientenkriterium (Grenzwertformulierung):
$$\frac{\frac{|x^{k+1}|}{(k+1-m)!}}{\frac{|x^k|}{(k-m)!}} = \frac{|x|^{k+1}\,(k-m)!}{|x|^k\,(k+1-m)!} = \frac{|x|}{k+1-m} \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty$$
$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert absolut für beliebige $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$.

c) Beweisen Sie: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *[c): 2 P.]*

Beweis: vollständige Induktion. Für $n = 1$ ist $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$
$$\overset{\text{ind}}{=} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{n+2-(n+1)}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!} \quad \checkmark$$

- **Aufgabe 2.**

a) Für welche Werte des reellen Parameters $\alpha > 0$ hat die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) \;=\; x^\alpha \,\ln x}$ an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit? Berechnen Sie für diesen Fall auch den betreffenden Wert des Limes $\boxed{\lim\limits_{x \to 0+} f(x)}$ in Abhängigkeit von α mit Hilfe einer geeigneten Formel. *[a): 2 P.]*

Verwende Regel von de l'Hospital für '∞/∞':

$$\lim_{x \to 0+} f(x) \;=\; \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \;=\; \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha\, x^{-\alpha-1}} \;=\; -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^{-\alpha}} \;=\; -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0+} x^\alpha \;=\; 0$$

für jedes $\alpha > 0$. Stetige Fortsetzung von rechts mit $f(0) = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = x^2 \,\ln x}$ ihren minimalen Wert an genau einer Stelle $x_{min} \in (0,1)$ annimmt, und geben Sie x_{min} an. *[b): 2.5 P.]*

Bestimme Nullstelle der Ableitung:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \,\ln x\right) \;=\; 2\,x\,\ln x + x^2\,\frac{1}{x} \;=\; x\,(2\,\ln x + 1) \;=\; 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln x \;=\; -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{min} \;=\; e^{-1/2} \;\in\; (0,1)$$

Wegen $f(0) = 0$ (siehe Lösung zu **a)**), $f(1) = 0$ und $f(x) < 0$ für $x \in (0,1)$ handelt es sich tatsächlich um eine Minimalstelle. Oder: Überprüfung der zweiten Ableitung:

$$f''(x_{min}) \;=\; 2\,\ln x_{min} + 3 \;=\; 2 \;>\; 0\,. \quad \checkmark$$

c) Berechnen Sie das **Taylorpolynom vom Grad 2** für die Funktion $f(x)$ aus **b)** bezüglich der Stelle $\mathbf{x_0 = 1}$. *[c): 1.5 P.]*

Taylor, mit $f'(x)$ und $f''(x)$ wie in **b)**:

$$\begin{aligned} T_2(x) \;&=\; f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\,f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &=\; 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{3}{2}\,(x-1)^2 \;=\; \frac{1}{2} - 2\,x + \frac{3}{2}\,x^2 \end{aligned}$$

- **Aufgabe 3.**

a) Berechnen Sie das Integral $\boxed{\int x^2 \ln x \, dx}$ $(x > 0)$ mittels partieller Integration. *[a): 2.5 P.]*

$$\int \underbrace{x^2}_{f'} \underbrace{\ln x}_{g} \, dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{f} \underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{f} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

b) Die Funktion $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $\boxed{f(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} \, dt}$ besitzt einen Wendpunkt in $(0, \infty)$. Geben Sie diesen an. *[b): 2 P.]*

Mit

$$f'(x) = x^2 e^{-x^2},$$

$$f''(x) = 2x e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} (-2x) = 2x (1 - x^2) e^{-x^2}$$

und $e^{-x^2} > 0$ folgt für den Wendepunkt die Gleichung

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 .$$

c) Geben Sie für die Funktion $\boxed{f(x) = x^n + c \quad (n \in \mathbb{N}_0,\ c \in \mathbb{R})}$ eine auf $[0, 1]$ gültige Lipschitzkonstante an. *[c): 1.5 P.]*

Aus dem Mittelwertsatz und mit $f'(x) = n\, x^{n-1}$ folgt für alle $x_1, x_2 \in [0, 1]$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \max_{\xi \in [0,1]} |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| = n\, |x_1 - x_2|$$

somit $L = n$.

Alternative: Stelle $f(x_1) - f(x_2)$ als Integral über f' dar und schätze ab, oder in elementarer Weise mittels Lemma 1.2 aus dem Skriptum.