Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2012/13

# ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

## 1. Übungstest (FR, 9.11.2012) *(Sammler mit Lösungen)*

- **Aufgabe 1.**

a ) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.\overline{15}}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen Bruch um. *[a): 2.5 P.]*

$$\begin{aligned} 1.\overline{15} &= 1 + \frac{15}{100} + \frac{15}{10000} + \dots \\ &= 1 + 15\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots\right) = 1 + 15\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n \\ &= 1 + 15\,\frac{1/100}{1 - 1/100} = 1 + 15\,\frac{1}{99} = \frac{114}{99} = \frac{38}{33} \end{aligned}$$

b ) Sei $m, n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine möglichst einfache Formel an für den Wert des Produktes $\boxed{\prod_{k=1}^{n} k^{-m}}$ *[b): 1.5 P.]*

$$\prod_{k=1}^{n} k^{-m} = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{-m} = \frac{1}{(n!)^m}$$

c ) Sei $0 \le k \le n$. Geben Sie eine möglichst einfache Formel an für den Wert von $\boxed{\binom{n+1}{k} \Big/ \binom{n}{k}}$ *[c): 2 P.]*

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{\cancel{k!}\,(n+1-k)!}}{\dfrac{n!}{\cancel{k!}\,(n-k)!}} = \frac{(n+1)!\,(n-k)!}{n!\,(n+1-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k}$$

d ) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt $\boxed{|ab| \le \frac{1}{2}\left(\varepsilon\, a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}\right)}$ *[d): 3 <u>EXTRA</u>-P.]*

Mit $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$ gilt

$$0 \le \left(\delta\, a \pm \frac{b}{\delta}\right)^2 = \varepsilon\, a^2 \pm 2\,a\,b + \frac{b^2}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \mp a\,b \le \frac{1}{2}\left(\varepsilon\, a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}\right) \quad \checkmark$$

- **Aufgabe 2.**

a) Berechnen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ den Wert der Summe $\boxed{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j\,!\,(n-j)\,!}}$ *[a): 2.5 P.]*

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j\,!\,(n-j)\,!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} = \frac{1}{n!} \left( \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^j\, 1^{n-j} - \binom{n}{0} - \binom{n}{n} \right)$$
$$= \frac{(1+1)^n - 1 - 1}{n!} = \frac{2\,(2^{n-1}-1)}{n!}$$

b) Beweisen Sie: $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} (k\,k!\,) = n! - 1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *[b): 2.5 P.]*

- Induktionsanfang $(n=1)$: $0 = 0$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n} (k\,k!\,) = \underline{\sum_{k=0}^{n-1} (k\,k!\,)} + n\,n! \stackrel{\text{ind}}{=} \underline{(n! - 1)} + n!\,n = n!\,(1+n) - 1 = (n+1)! - 1 \checkmark$$

c) Sei $p$ eine gegebene Primzahl. Geben Sie eine explizite Darstellung an für die Menge

$$\boxed{\left\{ x = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} : \; u > 0,\; v > 0 \text{ und } u\,v = p^2 \right\}}$$ *[c): 1 P.]*

$$\left\{ \frac{p}{p}, \frac{p^2}{1}, \frac{1}{p^2} \right\} = \left\{ 1,\, p^2,\, \frac{1}{p^2} \right\}$$

- **Aufgabe 3.**

a) Beweisen Sie: $\boxed{\{a_n\} = \left\{\frac{2^n}{n!}\right\}}$ ist eine Nullfolge. *[a): 1.5 P.]*

Die Folge ist positiv. Schätze nach oben ab durch Majorante, die eine Nullfolge ist:

$$a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \leq 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n} \overset{n \to \infty}{\to} 0 \;\checkmark$$

(Einschließungsprinzip).

b) Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 := c \;\text{ und }\; a_{n+1} := \frac{a_n}{1 + a_n}\,, \quad n \geq 1}$

wobei $c \in \mathbb{R}$ ein gegebener Parameter ist. Geben Sie alle möglichen Werte $a^* \in \mathbb{R}$ an, die als Grenzwert in Frage kommen. *[b): 2 P.]*

Für $a^* = \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1}$ muss gelten

$$a^* = \frac{a^*}{1 + a^*} \quad \Leftrightarrow \quad a^*(1 + a^*) = a^* \quad \Leftrightarrow \quad a^* = 0$$

(quadratische Gleichung für $a^*$).

c) Untersuchen Sie die Funktion $\boxed{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x + \frac{1}{x}}$ auf Surjektivität und Injektivität.

(Anmerkung: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$) *[c): 2.5 P.]*

- $f$ nicht surjektiv wegen $f(x) > \max\{x, 1/x\} \geq 1$ für alle $x > 0$
- $f$ nicht injektiv wegen $f(x) = f(1/x)$

Oder Injektivität stur gemäß Definition nachprüfen:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \text{ oder } x_1 x_2 = 1, \text{ d.h. } x_2 = \frac{1}{x_1}$$

Bzw. mittels Rechnung: Sei $y > 0$. Die Gleichung $f(x) = y$, d.h.

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x\,y + 1 = 0 \qquad (x \text{ kann nicht } 0 \text{ sein})$$

hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 4}$$

- $y < 2$: keine reelle Lösung $\Rightarrow$ $f$ nicht surjektiv
- $y > 2$: zwei positive Lösungen $x_{1,2}$ $\Rightarrow$ $f$ nicht injektiv

Anmerkung: Es gilt $f(x) \geq 2$ für alle $x > 0$.

- **Aufgabe 1.**

a) Beweisen Sie: $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2\,(k-1)! \;=\; (n+1)!-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *[a): 2.5 P.]*

- Induktionsanfang $(n=1)$: $1 = 1$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2\,(k-1)! \;=\; \underline{\sum_{k=0}^{n} k^2\,(k-1)!} \;+\; (n+1)^2\,n! \;\overset{\text{ind}}{=}\; \underline{(n+1)!-1} \;+\; (n+1)^2\,n!$$

$$= (n+1)!-1+(n+1)(n+1)! \;=\; (n+1)!\,(1+n+1)-1 \;=\; (n+2)!-1 \;✓$$

b) Berechnen Sie für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ den Wert der Summe $\boxed{\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{k-j}}$ *[b): 2.5 P.]*

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} - \binom{k}{0} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 1^j\,1^{k-j} - 1 \;=\; (1+1)^k - 1 \;=\; 2^k - 1$$

c) Sei $q$ eine gegebene Primzahl. Geben Sie eine explizite Darstellung an für die Menge

$\boxed{\left\{ n \in \mathbb{N} : \exists\, k \in N \;\text{ mit }\; k\,n = q^2 \right\}}$ *[c): 1 P.]*

$$\left\{ 1,\; q,\; q^2 \right\}$$

• **Aufgabe 2.**

a) Sei $0 < k \le m$. Geben Sie eine möglichst einfache Formel an für den Wert von $\boxed{\binom{m}{k} \Big/ \binom{m-1}{k-1}}$

*[a): 2 P.]*

$$\frac{\binom{m}{k}}{\binom{m-1}{k-1}} = \frac{\dfrac{m!}{k!\,\cancel{(m-k)!}}}{\dfrac{(m-1)!}{(k-1)!\,\cancel{(m-k)!}}} = \frac{m!\,(k-1)!}{(m-1)!\,k!} = \frac{m}{k}$$

b) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.1\overline{3}}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen Bruch um.

*[b): 2.5 P.]*

$$1.1\overline{3} = \frac{11}{10} + 3\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots\right) = \frac{11}{10} + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots\right)$$
$$= \frac{11}{10} + \frac{3}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{11}{10} + \frac{3}{10}\,\frac{1/10}{1-1/10} = \frac{11}{10} + \frac{3}{10}\,\frac{1}{9}$$
$$= \frac{11}{10} + \frac{1}{30} = \frac{34}{30} = \frac{17}{15}$$

c) Sei $k, m \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine möglichst einfache Formel an für den Wert des Produktes $\boxed{\prod_{i=1}^{m-1} i^k}$

*[c): 1.5 P.]*

$$\prod_{i=1}^{m-1} i^k = \left(\prod_{i=1}^{m-1} i\right)^k = \big((m-1)!\big)^k$$

d) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ gilt $\boxed{2\,|xy| \le \frac{x^2}{\delta} + \delta\,y^2}$ *[d): 3 EXTRA-P.]*

Mit $\varepsilon = \sqrt{\delta} > 0$ gilt

$$0 \le \left(\frac{x}{\varepsilon} \pm \varepsilon\,y\right)^2 = \frac{x^2}{\delta} \pm 2\,x\,y + \delta\,y^2 \quad \Rightarrow \quad \mp 2\,x\,y \le \frac{x^2}{\delta} + \delta\,y^2 \quad \checkmark$$

- **Aufgabe 3.**

a) Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 := c \;\text{ und }\; a_n := \dfrac{1+3\,a_{n-1}}{a_{n-1}+3}\,,\quad n \geq 2}$

wobei $c \in \mathbb{R}$ ein gegebener Parameter ist. Geben Sie alle möglichen Werte $a^* \in \mathbb{R}$ an, die als Grenzwert in Frage kommen. *[a): 2 P.]*

Für $a^* = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$ muss gelten

$$a^* = \frac{1+3\,a^*}{a^*+3} \quad\Leftrightarrow\quad (a^*)^2 + 3\,a^* = 1 + 3\,a^* \quad\Leftrightarrow\quad a^* = \pm 1$$

(quadratische Gleichung für $a^*$).

b) Beweisen Sie: $\boxed{\{a_n\} = \left\{3^n\,(n!)^{-1}\right\}}$ ist eine Nullfolge. *[b): 1.5 P.]*

Die Folge ist positiv. Schätze nach oben ab durch Majorante, die eine Nullfolge ist:

$$a_n = 3^n\,(n!)^{-1} = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdots 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \leq 3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{n} = \frac{3^3}{2\,n} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \;\checkmark$$

(Einschließungsprinzip).

c) Untersuchen Sie die Funktion $\boxed{f:\,(0,2)\to\mathbb{R}_+,\quad f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2}}$ auf Surjektivität und Injektivität.

(Anmerkung: $\mathbb{R}_+ = \{x\in\mathbb{R}:\, x>0\}$) *[c): 2.5 P.]*

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x}$$

- $f$ nicht surjektiv wegen
$$0 < x < 2,\quad 0 < (2-x) < 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x} > \frac{1}{2}\,,\quad \frac{1}{2-x} > \frac{1}{2} \quad (x\in(0,2))\,,$$
daher
$$f(x) > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 0$$
- $f$ nicht injektiv wegen $f(x) = f(2-x)$

Bzw. mittels Rechnung: Sei $y > 0$. Die Gleichung $f(x) = y$, d.h.

$$\frac{2}{x(2-x)} = y \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - 2\,x + \frac{2}{y} = 0$$

hat die Lösungen

$$x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{1 - \frac{2}{y}}$$

- $y < 2$: keine reelle Lösung $\Rightarrow$ $f$ nicht surjektiv
- $y > 2$: zwei positive Lösungen $x_{1,2}$ $\Rightarrow$ $f$ nicht injektiv

Anmerkung: Es gilt $f(x) \geq 2$ für alle $x \in (0,2)$.

- **Aufgabe 1.**

a) Sei $m, n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine möglichst einfache Formel an für den Wert des Produktes $\prod_{j=1}^{m+1} j^{-n}$

*[b): 1.5 P.]*

$$\prod_{j=1}^{m+1} j^{-n} = \Big(\prod_{j=1}^{m+1} j\Big)^{-n} = \frac{1}{\big((m+1)!\big)^n}$$

b) Sei $0 < k \le n$. Geben Sie eine möglichst einfache Formel an für den Wert von $\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

*[c): 2 P.]*

$$\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!\,(k-1)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

c) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $1.\overline{21}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen Bruch um.

*[a): 2.5 P.]*

$$\begin{aligned} 1.\overline{21} &= 1 + \frac{21}{100} + \frac{21}{10000} + \dots \\ &= 1 + 21\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots\right) = 1 + 21\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n \\ &= 1 + 21\,\frac{1/100}{1 - 1/100} = 1 + 21\,\frac{1}{99} = \frac{120}{99} = \frac{40}{33} \end{aligned}$$

d) Zeigen Sie die Gültigkeit der Ungleichung $|xy| \le \frac{c}{2}\,x^2 + \frac{y^2}{2\,c}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $c > 0$.

*[d): 3 EXTRA-P.]*

Mit $\varepsilon = \sqrt{c} > 0$ gilt

$$0 \le \left(\varepsilon\,x \pm \frac{y}{\varepsilon}\right)^2 = c\,x^2 \pm 2\,x\,y + \frac{y^2}{c} \quad \Rightarrow \quad \mp x\,y \le \frac{1}{2}\left(c\,x^2 + \frac{y^2}{c}\right) \quad \checkmark$$

- **Aufgabe 2.**

a) Beweisen Sie: $\boxed{\{a_n\} = \left\{\frac{n\,n!}{n^n}\right\}}$ ist eine Nullfolge. *[a): 1.5 P.]*

> Die Folge ist positiv. Schätze nach oben ab durch Majorante, die eine Nullfolge ist:
> $$a_n = \frac{n\,n!}{n^n} = n\,\frac{1\cdot 2\cdots n}{n\cdot n\cdots n} \le \frac{2}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ \checkmark$$
> (Einschließungsprinzip).

b) Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 := c \ \text{ und } \ a_n := 4\,\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}}\,, \quad n \ge 2}$

wobei $c \in \mathbb{R}$ ein gegebener Parameter ist. Geben Sie alle möglichen Werte $a^* \in \mathbb{R}$ an, die als Grenzwert in Frage kommen. *[b): 2 P.]*

> Für $a^* = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$ muss gelten
> $$a^* = 4\,\frac{a^*-1}{a^*} \qquad \Leftrightarrow \qquad a^* = 2$$
> (quadratische Gleichung für $a^*$).

c) Untersuchen Sie die Funktion $\boxed{f:\,(0,1)\to\mathbb{R}_+,\quad f(x) = \frac{1}{x\,(1-x)}}$ auf Surjektivität und Injektivität.

(Anmerkung: $\mathbb{R}_+ = \{x\in\mathbb{R}:\ x>0\}$) *[c): 2.5 P.]*

> - $f$ nicht surjektiv wegen $x\,(1-x) \le 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge 1 \quad (x\in(0,1))$
> - $f$ nicht injektiv wegen $f(x) = f(1-x)$
>
> Oder Injektivität stur gemäß Definition nachprüfen:
> $$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1\,(1-x_1) = x_2\,(1-x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \ \text{ oder } \ x_1 = 1-x_2$$
> Bzw. mittels Rechnung: Sei $y>0$. Die Gleichung $f(x) = y$, d.h.
> $$\frac{1}{x(1-x)} = y \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - x + \frac{1}{y} = 0$$
> hat die Lösungen
> $$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{y}}$$
> - $y<4$: keine reelle Lösung $\quad \Rightarrow \quad f$ nicht surjektiv
> - $y>4$: zwei positive Lösungen $x_{1,2} \quad \Rightarrow \quad f$ nicht injektiv
>
> Anmerkung: Es gilt $f(x) \ge 4$ für alle $x \in D$.

- **Aufgabe 3.**

a ) Berechnen Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ den Wert der Summe $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k}}$ *[a): 2.5 P.]*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k}\, 1^{n-k} = \left(\frac{1}{3}+1\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n}$$

b ) Beweisen Sie: $\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)\,!} = 1 - \frac{1}{n!}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *[b): 2.5 P.]*

- Induktionsanfang $(n = 1)$: $0 = 0$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)\,!} = \underline{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)\,!}} + \frac{n}{(n+1)\,!} \overset{\text{ind}}{=} \underline{1 - \frac{1}{n!}} + \frac{n}{(n+1)\,!}$$

$$= 1 - \frac{(\cancel{n}+1) - \cancel{n}}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)\,!} \quad ✓$$

c ) Seien $p_1$, $p_2$ zwei gegebene Primzahlen. Geben Sie eine explizite Darstellung an für die Menge

$$\boxed{\left\{ (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m\, n = p_1\, p_2 \right\}}$$

*[c): 1 P.]*

$$\left\{ (1, p_1\, p_2),\ (p_1,\, p_2),\ (p_2,\, p_1),\ (p_1\, p_2,\, 1) \right\}$$