

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 11.01.2013) (*Sammler mit Lösungen*)

- **Aufgabe 1.** Gegeben ist die Funktion

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+c}\right), \quad c \in \mathbb{R}, \quad c > 0$$

- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D von $g(x)$ in Abhängigkeit von c .
Liegt für $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vor?

[a): 2 P.]

$$\frac{x^2}{x+c} > 0 \Leftrightarrow x+c > 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x > -c \wedge x \neq 0$$

$$\text{Oder so: } \ln\left(\frac{x^2}{x+c}\right) = 2 \underbrace{\ln|x|}_{x \neq 0} - \underbrace{\ln(x+c)}_{x > -c}$$

$$\text{Daher: } D = (-c, \infty) \setminus \{0\}$$

Keine hebbare Unstetigkeit an $x = 0$, da $g(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow 0$

- b) Untersuchen Sie mit Hilfe der Ableitung, für welche $x \in D$ die Funktion $g(x)$ streng monoton wachsend ist.

[b): 2 P.]

$$g'(x) = \frac{x+2c}{x(x+c)}, \quad g \text{ streng monoton wachsend für } x \in (0, \infty)$$

- c) Geben Sie für den Fall $c = 2$ die Gleichung der Tangente an der positiven Nullstelle der Funktion $g(x)$ an, d.h. an der Stelle $(x_0, g(x_0))$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x > 0$ und $g(x_0) = 0$.

[c): 2 P.]

$$\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

$$c = 2 \Rightarrow g'(2) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Tangente: } y = \frac{3}{4}(x-2) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

• Aufgabe 2.

a) Untersuchen Sie die bedingte bzw. absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^{n-1}} \quad [a): 1.5 P.]$$

Quotientenkriterium (Grenzwertformulierung):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^n}}{(-1)^n \frac{n}{3^{n-1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) 3^{n-1}}{n 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$$

\Rightarrow Reihe ist absolut konvergent.

b) Geben Sie eine obere Schranke an für den Wert der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n = \frac{2^n}{3^n(4n+3)}$$

[b): 1.5 P.]

Eine obere Schranke erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe als Majorante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(4n+3)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2$$

c) Wie lautet der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n(4n+3)} \quad ?$$

[c): 1 P.]

Da die Reihe konvergent ist, gilt notwendigerweise $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Siehe Satz 5.4 im VO-Skriptum.

d) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$$

(Hinweis: umformen.) [d): 2 P.]

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4(n+1)-1} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Konvergente Teleskopreihe: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4} \frac{1}{4n-1} \Big|_{n=1} = \frac{1}{12}$$

• Aufgabe 3.

- a) Zeigen Sie, dass sich die Funktion $g(x)$ an $x = 0$ stetig fortsetzen lässt, [a): 2 P.]

und geben Sie den betreffenden Funktionswert an:

$$g(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{2}\right) \frac{\sin x}{x}, & -1 < x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Regel von de l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow 0-} \cos x + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+x} = 1$$

$\Rightarrow g$ stetig fortsetzbar an $x = 0$, mit $g(0) = 1$.

- b) Ist die stetig fortgesetzte Funktion $g(x)$ aus a) auf $(-1, 1)$ [b): 1.5 + max. 3 Extra-P.]
stetig differenzierbar?

Anmerkung: 1.5 Punkte gibt es dafür, wenn Sie angeben, wie vorzugehen ist. Die Extra-Punkte gibt es für die korrekte Durchführung; das ist etwas mehr Arbeit, machen Sie das eher zum Schluss. Nicht gleich im Kästchen rechnen!

Überprüfe die kritische Stelle $x = 0$ (mehrfache Anwendung von de l'Hospital):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{1}{2} \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0-} \sin x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow g(x)$ ist an $x = 0$ stetig differenzierbar.

(Anmerkung: $g''(x)$ hat jedoch an $x = 0$ eine Sprungstelle.)

- c) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin x \cosh x$ [c): 2.5 P.]

Zeigen Sie, dass $f(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $f^{(4)}(x) = c f(x)$, $c = \text{const.}$, ist, und geben Sie den Wert der Konstante c an.

$$f'(x) = \cos x \cosh x + \sin x \sinh x$$

$$f''(x) = 2 \cos x \sinh x$$

$$f'''(x) = 2(\cos x \cosh x - \sin x \sinh x)$$

$$f^{(4)}(x) = -4 \sin x \cosh x = -4 f(x), \quad \checkmark \quad c = -4$$

• Aufgabe 1.

- a) Zeigen Sie, dass sich die Funktion $f(x)$ an $x = 0$ stetig fortsetzen lässt, [a): 2 P.]

und geben Sie den betreffenden Funktionswert an:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \left(1 - \frac{x}{2}\right), & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{x} \ln(1+x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Regel von de l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow 0-} \cos x + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+x} = 1$$

$\Rightarrow f$ stetig fortsetzbar an $x = 0$, mit $f(0) = 1$.

- b) Ist die stetig fortgesetzte Funktion $f(x)$ aus a) auf $(-1, 1)$ [b): 1.5 + max. 3 Extra-P.]

stetig differenzierbar?

Anmerkung: 1.5 Punkte gibt es dafür, wenn Sie angeben, wie vorzugehen ist. Die Extra-Punkte gibt es für die korrekte Durchführung; das ist etwas mehr Arbeit, machen Sie das eher zum Schluss. Nicht gleich im Kästchen rechnen!

Überprüfe die kritische Stelle $x = 0$ (mehrfache Anwendung von de l'Hospital):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{1}{2} \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0-} \sin x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f(x)$ ist an $x = 0$ stetig differenzierbar.

(Anmerkung: $f''(x)$ hat jedoch an $x = 0$ eine Sprungstelle.)

- c) Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \sin x \cosh x$$

[c): 2.5 P.]

Zeigen Sie, dass $g(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $g^{(4)}(x) = c g(x)$, $c = \text{const.}$, ist, und geben Sie den Wert der Konstante c an.

$$g'(x) = \cos x \cosh x + \sin x \sinh x$$

$$g''(x) = 2 \cos x \sinh x$$

$$g'''(x) = 2 (\cos x \cosh x - \sin x \sinh x)$$

$$g^{(4)}(x) = -4 \sin x \cosh x = -4 g(x), \quad \checkmark \quad c = -4$$

• **Aufgabe 2.**

a) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$$

(Hinweis: umformen.) [a): 2 P.]

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4(k+1)-1} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Konvergente Teleskopreihe: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{1}{4} \frac{1}{4k-1} \Big|_{k=1} = \frac{1}{12}$$

b) Untersuchen Sie die bedingte bzw. absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{7^{n-1}}$$

[b): 1.5 P.]

Quotientenkriterium (Grenzwertformulierung):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{n+1}{7^n}}{(-1)^n \frac{n}{7^{n-1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) 7^{n-1}}{n 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{7n} = \frac{1}{7} < 1$$

\Rightarrow Reihe ist absolut konvergent.

c) Geben Sie eine obere Schranke an für den Wert der konvergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{2^n}{3^n(4+3n)}$$

[c): 1.5 P.]

Eine obere Schranke erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe als Majorante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(4+3n)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2$$

d) Wie lautet der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n(4n+3)}$$

?

[d): 1 P.]

Da die Reihe konvergent ist, gilt notwendigerweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Siehe Satz 5.4 im VO-Skriptum.

• **Aufgabe 3.**

Gegeben ist die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{a+x}\right), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$

- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D von $f(x)$ in Abhängigkeit von a .
Liegt für $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vor?

[a): 2 P.]

$$\frac{x^2}{a+x} > 0 \Leftrightarrow a+x > 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x > -a \wedge x \neq 0$$

$$\text{Oder so: } \ln\left(\frac{x^2}{a+x}\right) = 2 \underbrace{\ln|x|}_{x \neq 0} - \underbrace{\ln(a+x)}_{x > -a}$$

$$\text{Daher: } D = (-a, \infty) \setminus \{0\}$$

Keine hebbare Unstetigkeit an $x = 0$, da $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow 0$

- b) Untersuchen Sie mit Hilfe der Ableitung, für welche $x \in D$ die Funktion $f(x)$ streng monoton wachsend ist.

[b): 2 P.]

$$f'(x) = \frac{x+2a}{x(a+x)}, \quad f \text{ streng monoton wachsend für } x \in (0, \infty)$$

- c) Geben Sie für den Fall $a = 2$ die Gleichung der Tangente an der positiven Nullstelle der Funktion $f(x)$ an, d.h. an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ mit $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 > 0$ und $f(x_0) = 0$.

[c): 2 P.]

$$\ln\left(\frac{x^2}{2+x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2+x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

$$c = 2 \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Tangente: } y = \frac{3}{4}(x-2) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

• Aufgabe 1.

a) Geben Sie eine obere Schranke an für den Wert der konvergenten Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad b_k = \frac{3^k}{4^k(2k+3)}$$

[a): 1.5 P.]

Eine obere Schranke erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe als Majorante:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{4^k(2k+3)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 3$$

b) Wie lautet der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^k}{4^k(2k+3)} \quad ?$$

[b): 1 P.]

Da die Reihe konvergent ist, gilt notwendigerweise $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$.

Siehe Satz 5.4 im VO-Skriptum.

c) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$$

(Hinweis: umformen.) [c): 2 P.]

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4(n+1)-1} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Konvergente Teleskopreihe: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{4} \frac{1}{4n-1} \Big|_{n=1} = \frac{1}{12}$$

d) Untersuchen Sie die bedingte bzw. absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^{n-1}}$$

[d): 1.5 P.]

Quotientenkriterium (Grenzwertformulierung):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^n}}{(-1)^n \frac{n}{2^{n-1}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) 2^{n-1}}{n 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

\Rightarrow Reihe ist absolut konvergent.

• Aufgabe 2.

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin x \sinh x$$

[a): 2.5 P.]

Zeigen Sie, dass $f(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $f^{(4)}(x) = a f(x)$, $a = \text{const.}$, ist, und geben Sie den Wert der Konstante a an.

$$f'(x) = \cos x \sinh x + \sin x \cosh x$$

$$f''(x) = 2 \cos x \cosh x$$

$$f'''(x) = 2 (\cos x \sinh x - \sin x \cosh x)$$

$$f^{(4)}(x) = -4 \sin x \sinh x = -4 f(x), \quad \checkmark \quad a = -4$$

b) Zeigen Sie, dass sich die Funktion $g(x)$ an $x = 0$ stetig fortsetzen lässt,

[b): 2 P.]

und geben Sie den betreffenden Funktionswert an:

$$g(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{2}\right) \frac{\sin x}{x}, & -1 < x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Regel von de l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow 0-} \cos x + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+x} = 1$$

$\Rightarrow g$ stetig fortsetzbar an $x = 0$, mit $g(0) = 1$.

c) Ist die stetig fortgesetzte Funktion $g(x)$ aus b) auf $(-1, 1)$

[c): 1.5 + max. 3 Extra-P.]

stetig differenzierbar?

Anmerkung: 1.5 Punkte gibt es dafür, wenn Sie angeben, wie vorzugehen ist. Die Extra-Punkte gibt es für die korrekte Durchführung; das ist etwas mehr Arbeit, machen Sie das eher zum Schluss. Nicht gleich im Kästchen rechnen!

Überprüfe die kritische Stelle $x = 0$ (mehrfache Anwendung von de l'Hospital):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} g'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{1}{2} \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0-} \sin x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow g(x)$ ist an $x = 0$ stetig differenzierbar.

(Anmerkung: $g''(x)$ hat jedoch an $x = 0$ eine Sprungstelle.)

• **Aufgabe 3.**

Gegeben ist die Funktion

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+c}\right), \quad c \in \mathbb{R}, \quad c > 0$$

- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D von $g(x)$ in Abhängigkeit von c .
Liegt für $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vor?

[a): 2 P.]

$$\frac{x^2}{x+c} > 0 \Leftrightarrow x+c > 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x > -c \wedge x \neq 0$$

$$\text{Oder so: } \ln\left(\frac{x^2}{x+c}\right) = 2 \underbrace{\ln|x|}_{x \neq 0} - \underbrace{\ln(x+c)}_{x > -c}$$

$$\text{Daher: } D = (-c, \infty) \setminus \{0\}$$

Keine hebbare Unstetigkeit an $x = 0$, da $g(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow 0$

- b) Untersuchen Sie mit Hilfe der Ableitung, für welche $x \in D$ die Funktion $g(x)$ streng monoton wachsend ist.

[b): 2 P.]

$$g'(x) = \frac{x+2c}{x(x+c)}, \quad g \text{ streng monoton wachsend für } x \in (0, \infty)$$

- c) Geben Sie für den Fall $c = 2$ die Gleichung der Tangente an der positiven Nullstelle der Funktion $g(x)$ an, d.h. an der Stelle $(x_0, g(x_0))$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x > 0$ und $g(x_0) = 0$.

[c): 2 P.]

$$\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

$$c = 2 \Rightarrow g'(2) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Tangente: } y = \frac{3}{4}(x-2) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$