Das *arithmetische Mittel* bzw. das *geometrische* Mittel zweier positiver Zahlen a, b ist definiert als

$$\frac{a+b}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a\,b}\,.$$

a) Deuten Sie die beiden Begriffe geometrisch.

b) Beweisen Sie

$$\sqrt{a\,b} \;\leq\; \frac{a+b}{2} \quad \forall\; a, b > 0.$$

In welchen Fällen gilt Gleichheit?

c) Beweisen Sie: Unter allen Rechtecken mit gegebener Fläche A hat das Quadrat mit Fläche A den kleinsten Umfang.

---

a) $\dfrac{a+b}{2}$ ist die Länge, die eine Strecke der Länge $a+b$ genau in zwei gleiche Abschnitte zerteilt, bzw. ein Viertel des Umfanges eines Rechteckes mit Kantenlängen a, b.

$\sqrt{a\,b}$ ist die Kantenlänge eines Quadrates, das dieselbe Fläche hat wie das Rechteck mit Kantenlängen a, b.

b) Quadrieren $\rightsquigarrow$ Aussage äquivalent zu

$$\begin{aligned} 4\,a\,b \;&\leq\; (a+b)^2 \;=\; a^2 + 2\,a\,b + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad 0 \;&\leq\; a^2 - 2\,a\,b + b^2 \;=\; (a-b)^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Gleichheit daher genau dann wen $a = b$.

c) Für ein Rechteck (a, b) mit Fläche $a\,b = A$ gilt nach b):

$$\text{Umfang} \;=\; 2(a+b) \;\geq\; 4\sqrt{a\,b} \;=\; 4\sqrt{A}\,,$$

mit Gleichheit falls $a = b = \sqrt{A}$ (Quadrat).

$\square$

(∗) Beweisen Sie: *Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.*

Beweis indirekt:

- *Annahme:* $\{\} \neq M \subseteq \mathbb{N}$ hat *kein* kleinstes Element.
- Wähle $m_1 \in M$ beliebig.
- $\Rightarrow \quad \exists\, m_2 \in M$ mit $m_2 < m_1$.
- $\Rightarrow \quad \exists\, m_3 \in M$ mit $m_3 < m_2$.
- usw.

2 Fälle:

(i) M ist endlich. Dann ergibt sich nach endlich vielen Schritten ein Widerspruch, weil kein weiteres Element mehr existieren kann, das noch kleiner ist.

(ii) M ist unendlich. Wir haben eine Folge von Zahlen $m_i \in M$ konstruiert mit

$$m_1 > m_2 > m_3 > \dots$$

Nach k Schritten ($k \geq m_1$) folgt

$$m_k \leq 0 \notin M \quad - \text{ Widerspruch.}$$

Anmerkung: Streng genommen ist das en Induktionsargument – wir haben jedoch in der VO das Prinzip der vollständigen Induktion daraus hergeleitet. De facto ist die Aussage als *Axiom* anzusehen, und sie ist äquivalent zum Induktionsprinzip (das auch zu den Peano-Axiomen gehört).

□

a) Sei $m \leq n$. Geben Sie eine Formel für die Summe

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m + q^{m+1} + \ldots + q^n$$

an.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Summe

$$S_n(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{n} (1+\varepsilon)^k$$

ist ein Polynom vom Grad n in dem Parameter ε. Geben Sie die Koeffizienten a_j in der Darstellung

$$S_n(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n} a_j \, \varepsilon^j$$

an.

c) Die Zahlenfolge (a_k) sei rekursiv wie folgt definiert:

$$a_0 \text{ gegeben}; \quad a_n := 2\, a_{n-1} + c_n\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

mit einer gegebenen Folge (c_n). Geben Sie einen expliziten Formelausdruck für die a_n in Form einer Summe an. Was ergibt sich im Spezialfall $c_n \equiv c = \text{const.}$?

Anmerkung: Die Rekursion beschreibt einen diskreten Wachstumsprozess: a_n ist das Doppelte von a_{n-1} (wie bei einer geometrischen Folge), jeweils noch plus c_n.

Hinweis: Man rechnet einige Werte aus und kann so die allgemeine Gestalt der Lösung vermuten. Dann verifiziert man, dass die vermutete Lösung tatsächlich der gegebenen Rekursion genügt.

$\longrightarrow$

a) Zwei Varianten ($q \neq 1$, sonst trivial):

$$\sum_{k=m}^{n} q^k \;=\; q^m + q^{m+1} + \ldots + q^n \;=\; q^m\,(1 + q + \ldots + q^{n-m})$$

$$= q^m \sum_{j=0}^{n-m} q^j \;=\; q^m\,\frac{q^{n-m+1}-1}{q-1} \;=\; \frac{q^{n+1}-q^m}{q-1}$$

oder

$$\sum_{k=m}^{n} q^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} q^k \;-\; \sum_{k=0}^{m-1} q^k$$

$$= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - \frac{q^m-1}{q-1} \;=\; \frac{q^{n+1}-q^m}{q-1}$$

b) Geometrische Summe ($\varepsilon \neq 0$, sonst trivial):

$$S_n(\varepsilon) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (1+\varepsilon)^k \;=\; \frac{(1+\varepsilon)^{n+1}-1}{1+\varepsilon-1} \;=\; \frac{(1+\varepsilon)^{n+1}-1}{\varepsilon}$$

Mit

$$(1+\varepsilon)^{n+1} - 1 \;=\; \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \varepsilon^j \;-\; 1$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} \varepsilon^j$$

folgt (mit $\ell = j - 1$)

$$S_n(\varepsilon) \;=\; \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell\,\varepsilon^\ell, \quad a_\ell = \binom{n+1}{\ell+1}$$

$\longrightarrow$

c) Rechnen:

$$
\begin{aligned}
& a_0 \text{ gegeben} \\
a_1 &= 2\,a_0 + c_1 \\
a_2 &= 2\,a_1 + c_2 \;=\; 2\,(2\,a_0 + c_1) + c_2 \\
&= 4\,a_0 + 2\,c_1 + c_2 \\
a_3 &= 2\,a_2 + c_3 \;=\; 2\,(4\,a_0 + 2\,c_1 + c_2) + c_3 \\
&= 8\,a_0 + 4\,c_1 + 2\,c_2 + c_3 \qquad\qquad \text{usw.}
\end{aligned}
$$

Offenbar gilt allgemein:

$$a_n \;=\; 2^n\,a_0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}\,c_k$$

Beweis mittels vollständiger Induktion:

- $n = 0:\; a_0 = a_0 \quad \checkmark$
- $n \mapsto n+1:$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2\,a_n + c_{n+1} \\
&\overset{!}{=} 2\left(2^n\,a_0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}\,c_k\right) + c_{n+1} \\
&= 2^{n+1}\,a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k}\,c_k \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

Speziell für $c_n \equiv c = \text{const.}:$

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2^n\,a_0 + c\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \;=\; \qquad [\text{mit } \ell = n-k\;:] \\
&= 2^n\,a_0 + c\sum_{\ell=0}^{n-1} 2^{\ell} \\
&= 2^n\,a_0 + c\,\frac{2^n - 1}{2-1} \;=\; 2^n\,a_0 + (2^n - 1)\,c\,.
\end{aligned}
$$

Mögliche Anwendung:

– a_n = Größe einer Population zum Zeitpunkt n

– a_n verdoppelt sich in jedem Schritt; ‘Migrationsanteil’ $c_n > 0$ bzw. ‘Abwanderung’ $c_n < 0$ wird zusätzlich berücksichtigt

$\rightarrow$ exponentielles Wachstum der Population (falls keine signifikante Abwanderung). $\square$

Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)\,k = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

- $n = 1:\ 0 = 0 \quad \checkmark$
- $n \mapsto n+1:$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)\,k &= \sum_{k=1}^{n} (k-1)\,k \;+\; n(n+1) \\
&\overset{!}{=} \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3} \;+\; n(n+1) \\
&= \frac{(n-1)\,n\,(n+1) + 3\,n(n+1)}{3} \\
&= \frac{\big((n-1)+3\big)\,n(n+1)}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

$\square$

Finden Sie heraus, welchem Bildungsgesetz der Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \left(3\,k^2 - 3\,k + 1\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

gehorcht. Geben Sie aufgrund Ihrer Vermutung einen einfachen Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ für den Wert der Summe an und beweisen Sie seine Korrektheit.

Ausrechnen zeigt:

n	1	2	3	4	5	...
Summe	1	8	27	64	125	...

Vermutung: Allgemein gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \left(3\,k^2 - 3\,k + 1\right) \;=\; n^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: entweder mittels vollständiger Induktion (Standard), basierend auf dem Induktionsschritt

$$n^3 \;+\; \left(3\,(n+1)^2 - 3\,(n+1) + 1\right) \;=\; n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1 \;=\; (n+1)^3\,, \quad \checkmark$$

oder *einfacher:* Wegen

$$3\,k^2 - 3\,k + 1 \;=\; k^3 - \left(k^3 - 3\,k^2 + 3\,k - 1\right) \;=\; k^3 - (k-1)^3$$

handelt es sich (in versteckter Weise) um eine sogenannte *Teleskopsumme:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \left(3\,k^2 - 3\,k + 1\right) \;&=\; \sum_{k=1}^{n} k^3 - (k-1)^3 \\ &=\; (\cancel{1^3} - 0^3) + (\cancel{2^3} - \cancel{1^3}) + \ldots + (n^3 - \cancel{(n-1)^3}) \;=\; n^3\,.\end{aligned}$$

$\square$

Stellen Sie folgendes Produkt in der einfachst möglichen Weise als Formelausdruck in n dar $(n \in \mathbb{N})$:

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{n}{k}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{n}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} (n+k)}{\prod_{k=1}^{n} k}$$

Substituiere $n + k = \ell$, also $k = \ell - n$:

$$\prod_{k=1}^{n} (n+k) = \prod_{\ell=n+1}^{2\,n} \ell = \frac{\prod_{\ell=1}^{2\,n} \ell}{\prod_{\ell=1}^{n} \ell} = (2\,n)!/\,n!$$

$\Rightarrow$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{n}{k}\right) = \frac{(2\,n)\,!}{(n!)^{\,2}}$$

Alternative Schreibweise:

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} (n+k)}{\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{(n+1)(n+2)\,\cdots\,2\,n}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

$$= \frac{(1 \cdot 2 \cdots n)\,(n+1)(n+2)\,\cdots\,2\,n}{(1 \cdot 2 \cdots n)(1 \cdot 2 \cdots n)} = \frac{(2\,n)\,!}{(n!)^{\,2}}$$

$\square$

(∗) Eine Verallgemeinerung des Binomischen Lehrsatzes ist der *Multinomialsatz:*.
Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a_1 + \cdots + a_m)^n = \\ = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} \prod_{\ell=1}^{m} a_\ell^{k_\ell}, \quad \text{mit} \quad \underbrace{\binom{n}{k_1, \ldots, k_m}}_{\text{Multinomialkoeffizient}} := \frac{n!}{\prod_{\ell=1}^{m} k_\ell\,!}\,.$$

Dabei ist die Summe

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \ldots$$

so zu verstehen, dass alle möglichen geordneten Tupel$(k_1, \ldots, k_m)$ mit $k_\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$ berücksichtigt werden, deren Summe $k_1 + \cdots + k_m$ genau gleich n ist.

a) Zeigen Sie, dass sich für $m = 2$ genau der Binomische Lehrsatz ergibt.

b) Tabellieren Sie für den Fall $m = 3$ die Multinomialkoeffizienten zu $n = 1, 2, 3$.

c) Geben Sie eine kombinatorische Deutung der Multinomialkoeffizienten an.

---

a) Für $m = 2$:

$$(a_1 + a_2)^n = \\ = \sum_{k_1+k_2=n} \binom{n}{k_1, k_2} \prod_{\ell=1}^{2} a_\ell^{k_\ell}, \quad \text{mit} \quad \binom{n}{k_1, k_2} = \frac{n!}{\prod_{\ell=1}^{2} k_\ell\,!} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!}$$

$$= \sum_{\substack{k_1=0 \\ (k_2=n-k_1)}}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!}}_{=\binom{n}{k_1}} a_1^{k_1}\, a_2^{n-k_1} \quad \checkmark$$

$\longrightarrow$

b) $m = 3$:

```
-----------------------------------------------------
 n = 1    ( k1   k2   k3 )   Multinomialkoeffizient
-----------------------------------------------------
          ( 1    0    0  )        1
          ( 0    1    0  )        1
          ( 0    0    1  )        1
```

$$(a_1 + a_2 + a_3)^1 \;=\; a_1 + a_2 + a_3$$

```
-----------------------------------------------------
 n = 2    ( k1   k2   k3 )   Multinomialkoeffizient
-----------------------------------------------------
          ( 2    0    0  )        1
          ( 0    2    0  )        1
          ( 0    0    2  )        1

          ( 1    1    0  )        2
          ( 0    1    1  )        2
          ( 1    0    1  )        2
```

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 \;=\; \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) + 2\left(a_1\,a_2 + a_2\,a_3 \;+ a_3\,a_1\right)$$

```
-----------------------------------------------------
 n = 3    ( k1   k2   k3 )   Multinomialkoeffizient
-----------------------------------------------------
          ( 3    0    0  )        1
          ( 0    3    0  )        1
          ( 0    0    3  )        1

          ( 2    1    0  )        3
          ( 0    2    1  )        3
          ( 1    0    2  )        3
          ( 1    2    0  )        3
          ( 0    1    2  )        3
          ( 2    0    1  )        3

          ( 1    1    1  )        6
```

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3)^3 \;=\; & \left(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3\right) \\ & + 3\left(a_1^2\,a_2 + a_2^2\,a_3 \;+ a_3^2\,a_1 + a_1\,a_2^2 + a_2\,a_3^2 + a_3\,a_1^2\right) \\ & + 6\,a_1\,a_2\,a_3\end{aligned}$$

$\longrightarrow$

c) Kombinatorische Deutung:

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\cdots\,k_m!} \quad \big(0 \le k_j \le n;\;\; k_1+k_2+\cdots+k_m = n\big)$$

= Anzahl der Möglichkeiten, aus m verschiedenen Objekten

— eines k_1 mal auszuwählen,

— ein anderes k_2 mal auszuwählen,

...

– das letzte k_m mal auszuwählen,

(insgesamt $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$), und beliebig anzuordnen.

Beachte: Der Wert von $\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}$ ist unabhängig von der Nummerierung der Objekte.

– *Beispiel* zur Illustration $(m = 3;\; n = 4)$:

$$(a_1+a_2+a_3)^4 = (a_1+a_2+a_3)\cdot(a_1+a_2+a_3)\cdot(a_1+a_2+a_3)\cdot(a_1+a_2+a_3)$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{4}{4,0,0}\cdot\big(a_1^4+a_2^4+a_3^4\big) + \\
&\quad + \binom{4}{3,1,0}\cdot\big(a_1^3\,a_2 + a_1^3\,a_3 + a_1\,a_2^3 + \cdots\big) + \\
&\quad + \binom{4}{2,2,0}\cdot\big(a_1^2\,a_2^2 + a_1^2\,a_3^2 + a_2^2\,a_3^2\big) + \\
&\quad + \binom{4}{2,1,1}\cdot\big(a_1^2\,a_2\,a_3 + a_1\,a_2^2\,a_3 + a_1\,a_2\,a_3^2\big)
\end{aligned}$$

– *Beispiel:* Aus der Buchstabensuppe A A A R R T

$(m = 3;\; n = 6;\; k_1 = 3,\; k_2 = 2,\; k_3 = 1)$ lassen sich

$$\binom{6}{3,2,1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{720}{6\cdot 2\cdot 1} = 60$$

verschiedene Wörter bilden, z.B. ‘ARARAT’, ‘TRARAA’.

Die A’s und R’s sind dabei nicht unterscheidbar; z.B. wird ‘TRARAA’ nur einmal gezählt. □

a) Sei A eine nichtleere Menge. Wie sieht $A \times \{\,\}$ aus?

b) Seien A und B beliebige Mengen. Zeigen Sie

$$(A \cup B)^2 \;=\; A^2 \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup B^2\,.$$

c) Unter welcher Bedingung an A und B gilt $A \times B = B \times A$?

d) Falls A und B disjunkte Mengen sind, d.h. falls sie kein gemeinsames Element haben ($A \cap B = \{\,\}$), schreibt man für die Vereinigungsmenge manchmal auch $A \cup B =: A + B$. Zeigen Sie für diesen Fall

$$(A \cup B)^2 \;=\; A^2 + (A \times B) + (B \times A) + B^2\,,$$

insbesondere dass alle 4 rechts auftretenden kartesischen Produkte paarweise disjunkt sind.

---

a) $A \times \{\,\} \;=\; \{\,\}$

b)
$$\begin{aligned}
(A \cup B)^2 &= (A \cup B) \times (A \cup B) \\
&= \{(x,y) : x \in A \cup B \;\wedge\; y \in A \cup B\} \\
&= \{(x,y) : (x \in A \vee x \in B) \wedge (y \in A \vee y \in B)\} \\
&= \{(x,y) : x \in A \wedge y \in A\} \cup \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\} \cup \\
&\quad \cup \{(x,y) : x \in B \wedge y \in A\} \cup \{(x,y) : x \in B \wedge y \in B\} \\
&= A^2 \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup B^2
\end{aligned}$$

c) $A = B \;\Rightarrow\; A \times B \;=\; B \times A \;=\; A^2$

$A \neq B \;\Rightarrow\; \exists\, a^* \in A : \; a^* \notin B$ (oder umgekehrt)

$\Rightarrow$ Für jedes $b \in B$ gilt $(a^*, b) \in A \times B$, jedoch $(b, a^*) \notin A \times B$

$\Rightarrow\; A \times B \neq B \times A$

d) Vgl. b); für $A \cap B = \{\,\}$ sind die Mengen

$$A^2,\; A \times B,\; B \times A,\; B^2$$

paarweise disjunkt: sie können (paarweise betrachtet) keine gemeinsamen Elemente enthalten.

$\square$

a) Geben Sie folgende rationale Zahlen in Dezimaldarstellung an:

$$\frac{25}{11} \qquad \frac{25}{12} \qquad \frac{25}{13}$$

b) Wandeln Sie folgende Dezimalzahlen in Brüche um:

$$2.\overline{63} \qquad 2.41\overline{6}$$

---

a) Division ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{25}{11} &= 2.2727\ldots &&= 2.\overline{27} \\
\frac{25}{12} &= 2.0833\ldots &&= 2.08\overline{3} \\
\frac{25}{13} &= 1.923076923076\ldots &&= 1.\overline{923076}
\end{aligned}$$

b) Mittels geometrischer Reihe:

$$\begin{aligned}
2.\overline{63} &= 2 + 0.63 \cdot 10^0 + 0.63 \cdot 10^{-2} + 0.63 \cdot 10^{-4} + \ldots \\
&= 2 + 0.63 \sum_{k=0}^{\infty} \left(10^{-2}\right)^k \\
&= 2 + \frac{63}{100} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = 2 + \frac{63}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \\
&= 2 + \frac{63}{100} \cdot \frac{100}{99} = 2 + \frac{7}{11} = \frac{29}{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.41\overline{6} &= 2.41 + 0.6 \cdot 10^{-2} + 0.6 \cdot 10^{-3} + 0.6 \cdot 10^{-4} + \ldots \\
&= 2.41 + 0.6 \cdot 10^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(10^{-1}\right)^k \\
&= \frac{241}{100} + \frac{6}{1000} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{241}{100} + \frac{6}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= \frac{241}{100} + \frac{6}{1000} \cdot \frac{10}{9} = \frac{723}{300} + \frac{2}{300} = \frac{29}{12}
\end{aligned}$$

$\square$

(∗∗) $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl; es handelt sich als um ein nichttriviales mathematisches Objekt. Man kann jedoch eine formal saubere, rein rationale Erweiterung von $\mathbb{Q}$ angeben, wobei $\sqrt{2}$ einfach 'dazugeschwindelt' wird. Das geht so: Wir betrachten Zahlenpaare $w = (x, y) \in \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und definieren die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \text{Addition:} \quad & w_1 + w_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \text{Multiplikation:} \quad & w_1 \cdot w_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1\, x_2 + 2\, y_1\, y_2, x_1\, y_2 + x_2\, y_1) \end{aligned}$$

Die Menge $\mathbb{Q}^2$ gemeinsam mit den so definierten Operationen bezeichnen wir mit $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$. Identifizieren wir die speziellen Elemente der Gestalt $w = (x, 0)$ mit $\mathbb{Q}$, so stellt $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ offensichtlich eine (formal 'zweidimensionale') Erweiterung des rationalen Zahlenbereiches $\mathbb{Q}$ dar.

a) Man kann zeigen, dass in $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ alle Rechengesetze ('Körperaxiome') nach wie vor gelten. Beweisen Sie z.B. das Distributivgesetz

$$(w_1 + w_2)\, w_3 = w_1\, w_3 + w_2\, w_3\,, \quad w_i \in \mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}\,.$$

b) Warum bezeichnen wir den so konstruierten Zahlenbereich mit $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$? Anders gefragt: Mit welcher (bezüglich der Addition und Multiplikation abgeschlossenen) Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kann man $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ identifizieren? Welches Element $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ entspricht der Zahl $\sqrt{2}$? Schreiben Sie $x = (x_1, x_2)$ in konventioneller Weise als reelle Zahl unter Verwendung der Zahl $\sqrt{2}$.

c) Geben Sie die Formel für die *Division* $w_1/w_2 = (x_1, x_2)/(y_1, y_2)$ in $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ an ($w_2 \neq (0, 0)$).

---

a, b) Identifiziere (x, y) mit $x + y\sqrt{2}$, wobei:

$$\text{Addition: } (x_1 + y_1\sqrt{2}) + (x_2 + y_2\sqrt{2}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{2} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \text{Multiplikation: } & (x_1 + y_1\sqrt{2}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{2}) = \\ & = (x_1\, x_2 + 2\, y_1\, y_2) + (x_1\, y_2 + x_2\, y_1)\sqrt{2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

c) Division (x_2, y_2 nicht beide 0) in Analogie zu

$$\frac{x_1 + y_1\sqrt{2}}{x_2 + y_2\sqrt{2}} = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{2})(x_2 - y_2\sqrt{2})}{(x_2 + y_2\sqrt{2})(x_2 - y_2\sqrt{2})} = \frac{(x_1\, x_2 - 2\, y_1\, y_2) + (x_2\, y_1 - x_1\, y_2)\sqrt{2}}{\underbrace{x_2^2 - 2\, y_2^2}_{\neq\, 0\ (!)}} \qquad \square$$