Für eine endliche Menge A ist die Mächtigkeit $|A|$ definiert als die Anzahl der Elemente von A.

a) Zeigen Sie, dass für beliebige endliche Mengen A, B und C gilt

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| .$$

b) $(*)$ Zeigen Sie $|P(A)| = 2^{|A|}$ für jede endliche Menge A, wobei $P(A)$ die Potenzmenge (= die Menge aller Teilmengen) von A ist.

---

a) Zunächst: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, da sonst alle Elemente, die in A und B enthalten sind, in $A \cap B$ zweimal gezählt würden.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \\ &\qquad -|A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) – *Induktionsanfang* $(n = 0$, bzw. $n = 1)$:

Für $A = \emptyset$ gilt $|A| = 0$ und $|P(A)| = |\{\emptyset\} = 2^0 = 1$ $\checkmark$

Für $A = \{x_1\}$ gilt $|A| = 1$ und $|P(A)| = |\{\emptyset, A\}| = 2^1 = 2$ $\checkmark$

– *Induktionsannahme*:
Für $n \in \mathbb{N}$ gelte $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$.

– *Induktionsschluss*:
Zu zeigen: $|A| = n + 1 \Rightarrow |P(A)| = 2^{n+1}$.

Dazu sei $|A| = n + 1$ mit $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$. Wähle $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$, so ist $|B| = n$ und laut Induktionsannahme $|P(B)| = 2^n$, d.h. $P(B) = \{P_1, \ldots, P_{2^n}\}$, mit P_i = Teilmengen von B.

Mit $A = B \cup \{x_{n+1}\}$ folgt

$$P(A) = P(B) \cup \bigcup_{i=1}^{2^n} (P_i \cup \{x_{n+1}\}) .$$

Da die beiden Anteile disjunkt sind, gilt

$$|P(A)| = |P(B)| + \left| \bigcup_{i=1}^{2^n} (p_i \cup \{x_{n+1}\}) \right| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}. \quad \checkmark$$

$\longrightarrow$

Alternative zu b):

Verwende kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten:

Es gibt $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen $(0 \leq k \leq n)$ $\Rightarrow$

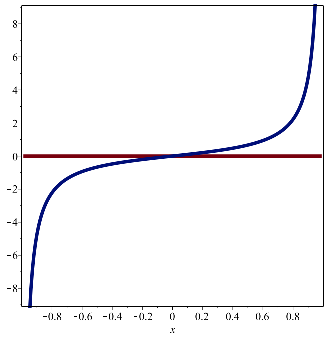
$$|P(A)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \quad \checkmark$$

$\square$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, bijektiv ist.

b) Gegeben seien die Funktionen $g(x) = \sqrt{2 - x^2}$ und $h(x) = \frac{1}{1-x}$.

- Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von g und h.
- Bestimmen Sie $g \circ h$ und $h \circ g$ zusammen mit ihren maximalen reellen Definitionsbereichen.



a) – *Injektivität*: Sei $f(x_1) = f(x_2)$ mit $x_1, x_2 \in (-1, 1)$.

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Leftrightarrow\ \frac{x_1}{1 - x_1^2} = \frac{x_2}{1 - x_2^2} \ \Leftrightarrow\ x_2\, x_1^2 + (1 - x_2^2)\, x_1 - x_2 = 0$$

... quadratische Gleichung in x_1, mit Lösungen $x_1 = x_2$ und $x_1 = {}^{-1}\!/_{x_2}$. Wegen $x_2 \in (-1, 1)$ kommt nur $x_1 = x_2$ infrage. f ist injektiv. ✓

– *Surjektivität*: Sei $y \in \mathbb{R}$. Für $y = 0$ gilt $f(0) = 0$.

Sei $y \neq 0$. $f(x) = y \ \Leftrightarrow\ y\, x^2 + x - y = 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 + x/y - 1 = 0$, mit den Lösungen

$$x_{1,2} \;=\; -\frac{1}{2\,y} \pm \sqrt{\frac{1}{4\,y^2} + 1}$$

Beachte

$$x^2 + x/y \underline{-1} \;\equiv\; (x - x_1)(x - x_2) \;\equiv\; x^2 - (x_1 + x_2)x + \underline{x_1\, x_2}\,,$$

also gilt $x_1\, x_2 = -1$.

(i) Für $y > 0$ folgt $x_1 > 0$ und $x_2 < 0$, wobei

$$x_1 \;=\; -\frac{1}{x_2} \;=\; \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2\,y} + \sqrt{\frac{1}{4\,y^2} + 1}}_{>1}} \;<\; 1,$$

jedoch $x_2 < -1$. Also ist $x_1 \in (0, 1)$ das eindeutige Urbild von a.

(ii) Für $y < 0$ folgt analog: $-1 < x_2 < 0$ und $x_1 > 1$. Also ist $x_2 \in (-1, 0)$ das eindeutige Urbild von a.

Die Funktion f ist somit injektiv und surjektiv und daher bijektiv. $\longrightarrow$

b) $g(x) = \sqrt{2-x^2}\,,\;\; h(x) = \frac{1}{1-x}$

– Definitionsbereiche von g und h:

$$D_g = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\,, \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

– Maximaler Definitionsbereich von $g \circ h$: Die Funktion

$$(g \circ h)(x) \;=\; g(h(x)) \;=\; \sqrt{2 - h(x)^2} \;=\; \sqrt{2 - \left(\frac{1}{1-x}\right)^2}$$

ist wohldefiniert für

$$\left|\frac{1}{1-x}\right| \le \sqrt{2}, \quad \text{d.h..} \quad |1-x| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

sein. Also:

$$D_{g \circ h} = \mathbb{R} \setminus \left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

– Für den maximalen Definitionsbereich von

$$(h \circ g)(x) \;=\; h(g(x)) \;=\; \frac{1}{1 - g(x)} \;=\; \frac{1}{1 - \sqrt{2-x^2}}$$

ist D_g so einzuschränken, dass $\sqrt{2-x^2} \in D_h$ gilt, also $\sqrt{2-x^2} \neq 1$.

Daher:

$$D_{h \circ g} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,] \setminus \{-1, 1\}$$

$\square$

Welche der folgenden Funktionen $f : D \to B$ sind injektiv, surjektiv, bijektiv? Wie muss man den Definitionsbereich D gegebenenfalls einschränken, damit f injektiv wird? Wie muss man den Bildbereich eventuell verändern, damit f surjektiv wird? Bestimmen Sie auch die Umkehrfunktionen der durch geeignete Einschränkungen hervorgehenden bijektiven Funktionen.

a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}, \quad B = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3+2x}{1-x}$,

b) $D = B = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2\,|x|$.

---

a) f ist injektiv, da $f(x_1) = f(x_2)$, d.h., $\frac{3+2x_1}{1-x_1} = \frac{3+2x_2}{1-x_2}$ äquivalent ist zu

$$(3+2x_1)(1-x_2) = (3+2x_2)(1-x_1) \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

Für $x \to \pm\infty$ strebt $f(x)$ gegen -2. Für jedes $y \in \mathbb{R}$, $y \neq -2$, gibt es ein Urbild $x \in \mathbb{R}$, da

$$\frac{3+2x}{1-x} = y \quad \Leftrightarrow \quad 3+2x = y - yx \quad \Leftrightarrow \quad 3 + (2+y)\,x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y-3}{2+y}$$

f ist nicht surjektiv. Um f surjektiv, somit bijektiv zu machen, schränkt man sie ein zu der Abbildung $f\colon D_f \to f(D_f)$, mit dem Bildbereich

$$f(D_f) = f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y \neq 2\}$$

Die Umkehrabbildung ist $y \mapsto f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2+y}$.

b) f ist nicht injektiv, da $f(x) = f(-x)$.

f ist nicht surjektiv, da $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Einschränkung des Definitionsbereiches auf $\mathbb{R}_+$ ergibt die bijektive Funktion $f_+\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^+$,

$$f_+(x) = x^3\,, \quad \text{mit} \quad f_+^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}\,.$$

('rechter Zweig').

Andere Möglichkeit ('linker Zweig' der Funktion): $f_-\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}^+$,

$$f_-(x) = -x^3\,, \quad \text{mit} \quad f_-^{-1}(y) = -\sqrt[3]{y}\,.$$

$\square$

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ mit $a_n = \frac{n-2}{n+1}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - 1| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt, für

a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, **b)** $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

Es gilt

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n-2}{n+1} - 1\right| = \left| - \frac{3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1}$$

Da für alle $n \geq N$ gilt $\frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{N+1}$, errechnet sich $N = N(\varepsilon)$ aus der Forderung

a)

$$\frac{3}{N+1} \leq \frac{1}{10}, \quad \text{also} \quad N \geq 29,$$

b)

$$\frac{3}{N+1} \leq \frac{1}{100}, \quad \text{also} \quad N \geq 299.$$

Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert 1: Für *jedes* $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon)$ mit $|a_n - 1| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$:

$$\frac{3}{N+1} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad N \geq \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Also: $N = N(\varepsilon)$ wächst etwa invers proportional zu ε für $\varepsilon \to 0$.

□

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen (a_n), (b_n), (c_n) und (d_n) auf Konvergenz:

$$a_n = \frac{n^2}{n^3 - 2} \qquad b_n = \frac{n^3 - 2}{n^2}$$

$$c_n = n - 1 \qquad d_n = b_n - c_n$$

Geben Sie im Fall der Konvergenz auch den Grenzwert der Folge an.

Wir verwenden Rechenregeln für konvergente Folgen.

- Für (a_n) gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3 - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{2}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^3}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

- Für (b_n) gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = \infty$$

  (b_n) ist bestimmt divergent gegen ∞.

- (c_n) mit $c_n = n - 1$ ist ebenfalls bestimmt divergent gegen ∞.

- Für (d_n) gilt

$$d_n = b_n - c_n = \frac{n^3 - 2}{n^2} - (n-1) = \cancel{n} - \frac{2}{n^2} - \cancel{n} + 1 = 1 - \frac{2}{n^2}$$

  Somit ist (d_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 1$.

Man sieht: Auch wenn zwei Folgen divergieren, ist es möglich, dass die Summen- bzw. Differenzfolge konvergiert (unbeschränkte Terme heben einander weg).

$\square$

a) Stellen Sie eine Vermutung auf, wie eine explizite Darstellung der rekursiv gegebenen Folge (a_n) aussieht:

$$a_{n+1} = 2\,a_n + 3\,a_{n-1}, \quad \text{mit den Startwerten} \quad a_1 = 1,\; a_2 = 3,$$

und weisen Sie ihre Korrektheit mittels vollständiger Induktion nach.

Hinweis: Berechnen Sie einige Folgenglieder.

b) $(*)$ Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = 0, \quad \text{und} \quad a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}} \quad \text{für } n \geq 2$$

nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt ist und dass sie streng monoton wachsend ist. Ist die Folge konvergent? Wie lautet ihr Grenzwert?

---

a) Auswertung zeigt $a_3 = 9$, $a_4 = 27, \ldots$. *Vermutung:* $a_n = 3^{n-1}$

- *Induktionsanfang*: $a_1 = 3^0 = 1$, $a_2 = 3^1 = 3$ ✓
- *Induktionsannahme*: Für alle $m \leq n$ gilt $a_m = 3^{m-1}$
- *Induktionsschluss*: Zu zeigen ist: $a_{n+1} = 3^n$.

Einsetzen in die Rekursion ergibt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2\,a_n + 3\,a_{n-1} \\ &\overset{\text{ind}}{=} 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-2} = (2+1)\,3^{n-1} = 3^n. \qquad ✓ \end{aligned}$$

b) Wir zeigen zuerst $0 < a_n < 1$ für $n \geq 2$ per Induktion.

- *Induktionsanfang:* $a_2 = \frac{1}{2}$ ✓
- *Induktionsannahme:* Es gelte $0 < a_n < 1$

Induktionsschluss: Zu zeigen ist $0 < a_{n+1} < 1$. Es gilt

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} \overset{\text{ind}}{>} \frac{1}{2} > 0 \quad ✓$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} \overset{\text{ind}}{<} \frac{1}{1} = 1 \quad ✓$$

Wegen $a_n < 1$ folgt weiters

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2 - a_n} - a_n = \frac{1 - 2\,a_n + a_n^2}{2 - a_n} = \frac{(1 - a_n)^2}{2 - a_n} > 0$$

$\Rightarrow$ (a_n) streng monoton wachsend.

Die Folge (a_n) ist beschränkt und monoton wachsend und daher nach Satz 4.7 konvergent. Für den Grenzwert a gilt die 'Fixpunktgleichung'

$$a = \frac{1}{2 - a} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2\,a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1\,.$$

Anmerkung: Ausrechnen bzw. Induktion zeigt: $a_n = \frac{n-1}{n}$. □

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Eine Folge konvergiert, falls sie monoton und beschränkt ist.

b) Eine konvergente Folge ist monoton und beschränkt.

c) Wenn eine Folge nicht monoton ist, kann sie nicht konvergieren.

d) Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, kann sie nicht konvergieren.

e) $(*)$ Wenn es eine Lösung zur Fixpunktgleichung einer rekursiv definierten Folge gibt, so konvergiert die Folge gegen diesen Wert.

Hinweis: Für eine durch ein rekursives Gesetz der Form $a_n = f(a_{n-1})$ definierte Folge bezeichnet die man die Gleichung $a = f(a)$ als die zugehörige Fixpunktgleichung.

---

a) Richtig (Satz 4.7)

b) Falsch. Beschränkt, aber nicht notwendigerweise monoton.

Gegenbeispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

c) Falsch (siehe b))

d) Richtig, da jede konvergente Folge beschränkt ist (Satz 4.2)

e) Falsch. Durch die Lösung der Fixpunktgleichung wird nur eine *Kandidatin* für einen Grenzwert ermittelt. Es kann auch sein, dass die Fixpunktgleichung mehrere Lösungen hat.

Die Konvergenz ist separat zu zeigen; vgl. Aufgabe 6b). Es spielt aber auch die *Stetigkeit*, der Funktion f eine Rolle, vgl. Kap. 6.

Beispiel: (a_n) definiert durch $a_{n+1} := q\, a_n$, mit $a_1 = 1$.

- Fixpunktgleichung: $a = q\, a$, eindeutige Lösung $a = 0$.
- Konvergenz:

$$a_n \to 0 \text{ für } |q| < 1$$
$$a_n \to 1 \text{ für } q = 1$$
$$(a_n) \text{ divergent für } q = -1 \text{ und } |q| > 1$$

$\square$

Zeigen Sie, dass für zwei beliebige positive Zahlen $x, y > 0$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} \; = \; \max\{x, y\}\,.$$

Hinweis: Schätzen Sie die Folgenglieder nach unten und oben durch Terme ab, in denen nur die größere der beiden Zahlen vorkommt, und verwenden Sie das Einschließungsprinzip.

Wir nehmen o.B.d.A. an $x \geq y$. Es gilt

$$x \; = \; \sqrt[n]{x^n} \; \leq \; \sqrt[n]{x^n + y^n} \; = \; x \sqrt[n]{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^n} \; \leq \; x \sqrt[n]{2}\,.$$

Mit $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ und dem Einschließungsprinzip folgt

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} \; = \; x \; = \; \max\{x, y\}\,.$$

$\square$

Zeigen Sie für $p \in \mathbb{N}$ und $|q| < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} n^p\, q^n = 0$.

Hinweis: Bilden Sie die n-te Wurzel der Beträge der Folgenglieder.

Wir verwenden die Rechenregeln für konvergente Folgen.

Betrachte $a_n = \sqrt[n]{|n^p\, q^n|} = (\sqrt[n]{n})^p\, |q|$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (siehe Vorlesung), und daher auch $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt[n]{n}\big)^p = \Big(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\Big)^p = 1$, folgt: Es gibt ein $\bar{q} \in [0,1)$, so dass für hinreichend große n gilt

$$|a_n| \;\le\; \bar{q} \;<\; 1\,.$$

Daher ist die Nullfolge $\{\bar{q}^n\}$ eine 'Majorante' für die gegebene positive Folge $\{a_n^n\} = \{n^p\, q^n\}$, d.h. $-\bar{q}^n \le a_n \le \bar{q}^n$ für hinreichend große n.

Aus dem Einschließungsprinzip folgt daher

$$\lim_{n\to\infty} n^p\, q^n \;=\; 0\,,$$

wie behauptet.

Anmerkung: Man könnte auch so argumentieren: Für hinreichend große n zeigt man leicht

$$|(n+1)^p\, q^{n+1}| \;\le\; \bar{q}\; |n^p\, q^n|\,, \qquad \bar{q} \in [0,1)\,,$$

woraus wiederum folgt, dass (für hinreichend große n) die Folge $\{|a_n|\}$ durch die Nullfolge $\{\bar{q}^n\}$ majorisiert wird.

$\square$

Bestimmen Sie für die angegebenen Folgen (a_n), (b_n) und (c_n) mit $n \in \mathbb{N}$ jeweils

– Supremum, Infimum, sowie
– $(*)$ Limes Superior und Limes Inferior,

falls diese Zahlen existieren.

a) $a_n = 1 + (-1)^n + n^{-\frac{1}{2}}$,

b) $$b_n = \begin{cases} \frac{k-1}{k}, & n = 3\,k \\ \frac{1}{k+1}, & n = 3\,k - 1 \\ -\frac{1}{k^2}, & n = 3\,k - 2 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

c) $$c_n = \frac{n^2+1}{n+1}\,.$$

Hinweis: 'Limes Superior' bzw. 'Limes Inferior' sind definiert als

$$\limsup_{n\to\infty} \{a_n\} := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \{a_k\}\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} \{a_n\} := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \{a_k\}\,,$$

sofern diese Grenzwerte existieren. Für beliebige (a_n) ist $(S_n) = \sup\limits_{k\geq n} \{a_k\}$ monoton fallend und $(I_n) = \inf\limits_{k\geq n} \{a_k\}$ monoton wachsend. Daher gilt auch

$$\limsup_{n\to\infty} \{a_n\} = \inf_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \{a_k\}\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} \{a_n\} = \sup_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \{a_k\}\,.$$

---

a) Die Folge $(a_n) > 0$ zerfällt in die zwei Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k-1}), mit

$$a_{2k} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2\,k}}\,, \qquad a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{2\,k-1}}\,, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Die beiden Teilfolgen sind jeweils monoton fallend und konvergent, mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 2$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0$.

– Daraus folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} a_{2k} = a_1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$
$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} a_{2k-1} = 0\,.$$

– Aus den Grenzwerten der Teilfolgen schließt man außerdem

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = 2\,,$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0\,.$$

$\longrightarrow$

b) Die Folge (b_n) zerfällt in drei Teilfolgen (b_{3k}), (b_{3k-1}) und (b_{3k-2}).

$0 \le (b_{3k}) = (\frac{k-1}{k})$: monoton steigend und konvergent gegen 1

$0 < (b_{3k-1}) = (\frac{1}{k+1})$: monoton fallend und konvergent gegen 0

$0 > (b_{3k-2}) = (-\frac{1}{k^2})$: monoton steigend und konvergent gegen 0

– Daraus folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = \max\Big\{\sup_{k\in\mathbb{N}} b_{3k},\ \sup_{k\in\mathbb{N}} b_{3k-1},\ \sup_{k\in\mathbb{N}} b_{3k-2}\Big\} = \max\{1, \tfrac{1}{2}, 0\} = 1$$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = \min\Big\{\inf_{k\in\mathbb{N}} b_{3k},\ \inf_{k\in\mathbb{N}} b_{3k-1},\ \inf_{k\in\mathbb{N}} b_{3k-2}\Big\} = \min\{0, 0, -1\} = -1$$

– Aus den Grenzwerten folgert man

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{k\to\infty} b_{3k} = 1\,,$$
$$\liminf_{n\to\infty} b_n = \lim_{k\to\infty} b_{3k-2} = 0\,.$$

c) Die Folge $(c_n) = \left(\frac{n^2+1}{n+1}\right)$ ist unbeschränkt, weiters streng monoton wachsend, denn

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \frac{(n+1)^2+1}{n+2} - \frac{n^2+1}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^3 + (n+1) - (n^2+1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{n^2+3\,n}{n^2+3\,n+2} > 0. \end{aligned}$$

– Da (c_n) nicht nach oben beschränkt ist, existiert $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n$ nicht. Es gilt

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} c_n = c_1 = 1.$$

– Da (c_n) unbeschränkt und streng monoton wachsend ist, existieren weder $\limsup\limits_{n\to\infty} c_n$ noch $\liminf\limits_{n\to\infty} c_n$.

$\square$