Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} x^{-k}\Big) \quad (|x|>1)$$

Mittels konvergenter geometrischer Reihe (zweimal):

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} x^{-k} = x^{-(n+1)}\sum_{\ell=0}^{\infty} x^{-\ell} = \frac{x^{-(n+1)}}{1-x^{-1}}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} x^{-k}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{-(n+1)}}{1-x^{-1}} = \frac{1}{1-x^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty} x^{-(n+1)}$$

$$= \frac{1}{1-x^{-1}}\sum_{m=1}^{\infty} x^{-m}$$

$$= \frac{x^{-1}}{(1-x^{-1})^2} = \frac{x}{(x-1)^2}$$

$\square$

Fortsetzung von UE 1, Aufgabe 3c): Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := q, \quad a_n := p\, a_{n-1} + q\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

mit $p \in [0, 1]$ und $q \geq 0$. (Interpretation: Abnahme einer Population a_n um einen Faktor p von Schritt zu Schritt, plus Zuwachs q durch Migration in jedem Schritt.)

a) Geben Sie in ähnlicher Weise wie für UE 1, 3c), eine explizite Formel für die a_n an.

b) Berechnen Sie den 'asymptotischen Zustand' $a_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

- unter Verwendung der Lösungsdarstellung aus a),
- ohne Verwendung von a),

für diejenigen Werte von p, für die dieser Limes existiert.

---

a) Analog wie in UE1, 3c):

$$\begin{aligned} a_n &= p^n q + \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} q \\ &= q \sum_{k=0}^{n} p^{n-k} = q \sum_{\ell=0}^{n} p^{\ell} = q\, \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} \end{aligned}$$

b) Daher: Limes existiert für $p \in [0, 1)$, mit

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{q}{1-p}$$

Der Wert von a_∞ folgt auch aus der *Fixpunktgleichung*

$$a_\infty = p\, a_\infty + q\,.$$

(Beachte: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$.)

- Für $p = 1$ gilt $a_n = (n+1)\, q \to \infty\,.$

□

(*) (Bedingte) Konvergenz eines Pfades in der Ebene:

Ein punktförmiges Tierchen (nennen wir es Bello) krabbelt in der (x, y) - Ebene herum, ausgehend vom Nullpunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ entlang horizontaler und vertikaler Geradenstücke: Zunächst

- 1 mm nach rechts,
- dann 1/2 mm nach oben,
- dann 1/3 mm nach links,
- dann 1/4 mm nach unten;

weiters

- 1/5 mm nach rechts,
- dann 1/6 mm nach oben,
- dann 1/7 mm nach links,
- dann 1/8 mm nach unten;

usw. Diesen Prozess denken wir uns bis ins Unendliche fortgesetzt. Mit (x_n, y_n) bezeichnen wir die Position von Bello nach n Schritten.

a) Überlegen Sie, wie weit sich Bello maximal vom Nullpunkt entfernt.

b) Drücken Sie x_n und y_n mittels n-abhängiger Summen $\sum\limits_{k=\cdots}^{\cdots}$ aus.

c) Da sich Bello nicht beliebig weit von seiner Startposition entfernt, sind diese Summen (Reihen) für $n \to \infty$ offensichtlich konvergent. Weisen Sie dies mathematisch rigoros nach. Sind diese Reihen absolut oder bedingt konvergent?

Anmerkung: Den Limes $(x_\infty, y_\infty) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n)$, d.h. den Limes der Position von Bello für $n \to \infty$, werden wir später mit Werkzeugen aus der Differentialrechnung bestimmen.

d) Angenommen, Bello krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit v mm/s. Mit t_n bezeichnen wir die Zeit, die nach n Schritten vergangen ist. Charakterisieren Sie das Konvergenzverhalten der Folge (t_n) für $n \to \infty$.

e) Angenommen, Bello beschleunigt während seiner Reise, d.h. er startet mit Geschwindigkeit v mm/s und verdoppelt seine Geschwindigkeit nach jedem Schritt. Wiederum bezeichnen wir mit t_n die Zeit, die nach n Schritten vergangen ist. Charakterisieren Sie das Konvergenzverhalten der Folge (t_n) für $n \to \infty$. Geben Sie (im Fall der Konvergenz) eine obere Schranke für $t_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} t_n$ an.

$\longrightarrow$

... Führt auf Reihen in x- bzw. y-Richtung.

a) [Skizze:] Maximal $\sqrt{1^2 + \frac{1}{2^2}}$ mm $= \frac{1}{2}\sqrt{5}$ mm vom Startpunkt weg (nach 2 Schritten)

b) Position nach n Schritten:

Falls $n = 2\,m - 1$ ungerade $(m = 1, 2, \ldots)$:

$$(x_n, y_n) = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}\,,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \ldots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m-2}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\,,\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}\right)$$

Ähnlich für $n = 2\,m$ gerade.

c) ... Zwei alternierende Reihen des Typs ('ungerade' bzw. 'gerade' harmonische Reihen):

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = x_\infty \quad \left[\ = \frac{\pi}{4} \ \text{ – später}\ \right]$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = y_\infty \quad \left[\ = \tfrac{1}{2}\ln 2 \ \text{ – später}\ \right]$$

... bedingt konvergent nach dem Leibniz-Kriterium,
jedoch nicht absolut konvergent (Beweis analog wie für Harmonische Reihe).

d) $\Rightarrow$ Bei konstanter Geschwindigkeit v ist Bello unendlich lange unterwegs und erreicht nie sein Ziel (x_∞, y_∞); es ist $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$.

Bello kommt dem Ziel jedoch beliebig nahe (Konvergenz der alternierenden Reihen): Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es einen Zeitpunkt t_N mit

Abstand zwischen (x_n, y_n) und (x_∞, y_∞) kleiner als ε für alle $n \geq N$.

e) Mit

- $v_1 = v,\ v_2 = 2\,v,\ \ldots,\ v_n = 2^{n-1}\,v$ und den Wegstrecken
- $s_1 = 1,\ s_2 = \frac{1}{2},\ \ldots,\ s_n = \frac{1}{n}$ gilt

$$t_n = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \ldots + \frac{s_n}{v_n} = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{1\cdot 2^0} + \frac{1}{2\cdot 2^1} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\right)\text{mm}$$

$$= \frac{1}{v}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,2^{k-1}}\,\text{mm} < \frac{1}{v}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}\,\text{mm} = \frac{2\,\text{mm}}{v}\,\text{s}\,.$$

- Bello durchkrabbelt eine unendlich lange Wegstrecke in endlicher Zeit.
- Geschwindigkeit $\to \infty$ für $n \to \infty$!
- Exakter Grenzwert: Es gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^{k-1}} = 2\ln 2 \approx 1.386294$ (später).

$\square$

Fortsetzung von Aufgabe 3:

Geben Sie eine Abschätzung dafür an, wie weit Bello nach n Schritten noch von seinem Ziel (x_∞, y_∞) entfernt ist.

Für $n = 2\,m - 1$ ungerade ($m = 1, 2, \ldots$; n gerade analog):

$$(x_n, y_n) = \Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}\,,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \ldots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m-2}\Big)$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\,,\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}\Big)$$

Satz 5.5 (Leibniz-Kriterium) $\Rightarrow$ (x_n) und (y_n) sind konvergente alternierende Reihen, und Satz 5.6 ist anwendbar.

Satz 5.6 besagt:
Der Reihenrest ist dem Betrag nach kleiner als das nächste Glied in der Reihe.

$\Rightarrow$ [$n = 2\,m - 1$ ungerade; n gerade analog]:

$$|x_n - x_\infty| \le \frac{1}{2\,m+1} = \frac{1}{n+2}\,, \qquad |y_n - y_\infty| \le \frac{1}{2\,m} = \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow$

Abstand zu (x_∞, y_∞) kleiner als $\sqrt{\dfrac{1}{(n+2)^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}} < \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}\,.$

Wesentliche Aussage: Der Abstand nimmt indirekt proportional zu n ab, also ziemlich langsam.

$\square$

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Kriteriums, dass die Reihe konvergiert.

b) Berechnen Sie den Wert der Reihe.

---

a) 1. Versuch: Mittels Dreiecksungleichung abschätzen:

$$0 < \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}} \le \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}} \le \frac{2\cancel{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{k}\,\cancel{\sqrt{k+1}}} = \frac{2}{\sqrt{k}} \qquad ☹$$

... funktioniert nicht: Man findet so keine konvergente Majorante.

2. Versuch:

$$0 < \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}} \le \frac{\cancel{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{k}\,\cancel{\sqrt{k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad ☹$$

... wieder nix.

3. Versuch: Rechnen:

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}} = \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k\,(k+1)}\,(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{(\cancel{k}+1)-\cancel{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}\,(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

$$\le \frac{1}{k\,\sqrt{k}} \qquad ☺$$

... konvergente Majorante. ✓

b) Teleskopreihe!

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1\,.$$

D.h., die Überlegung aus a) war ‘überflüssig’.

□

Die Werte $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ bezeichnet man als *Harmonische Zahlen*. Bekanntlich gilt $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \infty$ (Harmonische Reihe). Wie steht es um die Konvergenz der Reihen

$$\textbf{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H_n}\,, \qquad\qquad \textbf{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n\, H_n \quad (|q|<1) \quad ?$$

---

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$$

mit

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} > \frac{1}{1+1+\ldots+1} = \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ Harmonische Reihe ist divergente Minorante.

b) Verwende Quotientenkriterium (Grenzwertformulierung):

$$\frac{|q^{n+1}\,H_{n+1}|}{|q^n\,H_n|} = |q|\,\frac{H_{n+1}}{H_n} \quad \text{mit} \quad \frac{H_{n+1}}{H_n} = 1+\frac{1}{H_n\,(n+1)} \to 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n\,H_n \ \text{ konvergiert.}$$

Oder: Verwende Wurzelkriterium (Grenzwertformulierung):

$$\sqrt[n]{|q^n\,H_n|} = |q|\,\sqrt[n]{H_n} \le |q|\,\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} \to |q|<1$$

Bzw.: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\,n$ ist konvergente Majorante

(auch dafür: Quotientenkriterium oder Wurzelkriterium anwendbar).

$\square$

Partielle Summation (ein diskretes Analogon zur partiellen Integration):

a) Gegeben seien zwei Folgen (a_n) und (b_n). Schreiben Sie den Ausdruck

$$a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

in Form einer Teleskopsumme, und beweisen Sie davon ausgehend die Formel für die partielle Summation,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;=\; a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \;-\; \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\, (b_{k+1} - b_k)\,.$$

b) Falls $(a_n\, b_n)$ eine Nullfolge ist, ergibt sich aus a) rein formal für $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;=\; -\, a_1\, b_1 \;-\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}\, (b_{k+1} - b_k)\,.$$

Ist dann die Konvergenz der Reihe links bzw. rechts gesichert, oder benötigt man dafür zusätzliche Voraussetzungen?

c) $(*)$ Verwenden Sie die Formel für die partielle Summation, um den Wert der verallgemeinerten geometrischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k$$

zu berechnen. Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Reihe konvergent?

---

a) Teleskopsumme:

$$a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \;=\; \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1}\, b_{k+1} - a_k\, b_k)$$

Mit der Produktformel für Differenzen,

$$a_{k+1}\, b_{k+1} - a_k\, b_k \;=\; (a_{k+1} - a_k)\, b_k + a_{k+1}\, (b_{k+1} - b_k)$$

folgt

$$a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \;=\; \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;+\; \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\, (b_{k+1} - b_k)\,,$$

und daraus die Formel für partielle Summation.

$\longrightarrow$

b) In

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;=\; -a_1\, b_1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}\, (b_{k+1} - b_k)$$

konvergiert die linke Seite genau dann, wenn die rechte Seite konvergiert.

c) Mit

$$q^k \;=\; \frac{q^k\,(q-1)}{q-1} \;=\; \frac{q^{k+1}}{q-1} - \frac{q^k}{q-1} \;=:\; a_{k+1} - a_k$$

und $b_k = k,\; b_{k+1} - b_k = 1,$ folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\, q^k \;&=\; \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{q^{k+1}}{q-1} - \frac{q^k}{q-1}\Big)\, k \\ &=\; \frac{q^{n+1}}{q-1}\,(n{+}1) - \frac{q}{q-1}\cdot 1 \;-\; \sum_{k=1}^{n} \frac{q^{k+1}}{q-1}\cdot 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\, q^k \;&=\; -\,n\,\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{q-q^{n+1}}{1-q} + \frac{1}{1-q}\,\frac{q\,(q-q^{n+1})}{1-q} \\ &=\; -\,n\,\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{q\,(1-q^n)}{(1-q)^2}\end{aligned}$$

Man sieht (Quotientenkriterium): Konvergenz für $|q| < 1$, mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k \;=\; \frac{q}{(1-q)^2}$$

$\square$

(*) Gegeben seien die Folgen $(a_k) = (p^k)$ und $(b_k) = (q^k)$, wobei $|p| < 1$ und $|q| < 1$. Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sind konvergente geometrische Reihen.

a) Bestimmen den Wert der zugehörigen Cauchy'schen Produktreihe auf 2 Arten.

b) Welcher Sonderfall tritt hier auf? Diskutieren Sie diesen separat. (Hinweis: Aufgabe 7c).)

---

a) Produkt zweier absolut konvergenter geometrischer Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{1-q}$$

Dazu äquivalent: Darstellung als Cauchy-Produkt,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad \text{mit} \quad c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_{k-\ell}\, b_\ell$$

Berechnung der c_k [siehe Lemma 2.1, oder verwende geometrische Summe]:

$$c_k = \sum_{\ell=0}^{k} p^{k-\ell} q^{\ell} = \sum_{j=1}^{k+1} p^{k+1-j} q^{j-1} = \frac{p^{k+1} - q^{k+1}}{p-q} \quad (\text{für } p \neq q)$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k+1} - q^{k+1}}{p-q} = \frac{1}{p-q} \Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} p^{\ell} - \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{\ell} \Big)$$

$$= \frac{1}{p-q} \Big(\frac{p}{1-p} - \frac{q}{1-q} \Big) = \ \ldots \ = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{1-q} \quad \checkmark$$

b) Sonderfall: $p = q$ ('konfluenter' Fall; oben hätte man 0/0):

$$c_k = \sum_{\ell=0}^{k} q^{k-\ell} q^{\ell} = (k+1)\, q^k$$

$\Rightarrow$ Cauchy-Produkt einer geometrischen Reihe mit sich selbst ist verallgemeinerte geometrische Reihe (vgl. 7c)):

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, q^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k + \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

$$= \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \checkmark$$

$\square$

(∗) Die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x) = e^x$ ist durch die unendliche Reihe

$$e^x := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

definiert; diese ist für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

a) Für $x \neq 0$ ergibt sich durch formale Manipulation der Exponentialreihe:

$$g(x) := \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

Zeigen Sie mathematisch rigoros, dass diese Reihendarstellung für $g(x)$ korrekt ist.

b) Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$g(0) = 0/0$'. Setzt man andererseits in der Reihendarstellung für $g(x)$ den Wert $x = 0$ ein, so ergibt sich der Wert 1. Es ist naheliegend, daraus zu schließen, dass $g(x)$ an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit besitzt, mit $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$. Diese Argumentation muss jedoch genau begründet werden.

Beweisen Sie $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$, indem Sie

$$\lim_{x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = 1 \quad \text{bzw. äquivalent:} \quad \lim_{x \to 0} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} - 1 \Big) = 0$$

nachweisen. Schreiben Sie zu diesem Zweck den rechten Ausdruck $\Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \ldots - 1 \Big)$ wiederum als Reihe an, geben Sie dafür konvergente Majorante an, und zeigen Sie, dass deren Wert für $x \to 0$ tatsächlich gegen 0 konvergiert.

---

a) Korrektheit folgt aus den Rechenregeln für konvergente Reihen (Satz 5.1).

b)

$$\Big| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} - 1 \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \Big| = \Big| x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k+1)!} \Big|$$

$$= |x| \Big| \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{(\ell+2)!} \Big| \leq |x| \Big| \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell!} \Big| = |x|\, e^x \to 0$$

für $x \to 0$. ✓

□

Gegeben sei die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^p} - 1}{x}, \quad p > 0.$$

Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$f(0) = 0/0$'.

a) Untersuchen Sie, für welche $p > 0$ an der Stelle $x = 0$ eine hebbare rechtsseitige Unstetigkeit vorliegt, d.h. wann der Limes

$$\lim_{x \to 0+} f(x)$$

existiert, und berechnen Sie diesen Limes in Abhängigkeit von p. (Hinweis: Umformen.)

b) Für $p \geq 1$ kann man auch so vorgehen: Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sqrt{1+c} < 1 + \frac{c}{2} \quad \text{für} \quad c > 0,$$

und versuchen Sie so die Existenz von $\lim_{x \to 0+} f(x)$ für $p \geq 1$ nachzuweisen. Kann darauf basierend den Limes ebenfalls berechnen?

---

a) Umformen:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^p} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x^p} - 1)(\sqrt{1+x^p} + 1)}{x(\sqrt{1+x^p} + 1)}$$

$$= \frac{(\cancel{1} + x^p) - \cancel{1}}{x(\sqrt{1+x^p} + 1)} = \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1+x^p} + 1}$$

$\Rightarrow$ für $x \to 0+$:

$$f(x) \to \begin{cases} \infty, & 0 < p < 1 \\ \frac{1}{2}, & p = 1 \\ 0, & p > 1 \end{cases}$$

b) Für $c > 0$:

$$1 + c < 1 + c + \frac{c^2}{4} = \left(1 + \frac{c}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+c} < 1 + \frac{c}{2} \qquad \checkmark$$

Daher für $p \geq 1$:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{(\cancel{1} + \frac{x^p}{2}) - \cancel{1}}{x} = \frac{x^{p-1}}{2}$$

- Für $p = 1$ folgt daraus nur $0 \leq \lim_{x \to 0+} f(x) \leq \frac{1}{2}$, falls lim existiert.
- Für $p > 1$ folgt $f(x) \to 0$. $\checkmark$

$\square$