Formulieren Sie basierend auf der ε-δ - Definition der Stetigkeit

a) die Aussage, dass eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ nicht stetig ist,

b) die Aussage, dass f auf D nicht gleichmäßig stetig ist;

c) weiters die Aussage, dass f auf D nicht Lipschitz-stetig ist.

---

a) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ gibt mit

$$|x - x_0| < \delta\,, \quad \text{jedoch} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\,.$$

b) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ Stellen $x_1, x_2 \in D$ gibt mit

$$|x_1 - x_2| < \delta\,, \quad \text{jedoch} \quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon\,.$$

Anmerkung:
'nicht stetig' $\Rightarrow$ 'nicht gleichmäßig stetig', aber nicht umgekehrt.

c) Für alle $L \geq 0$ gibt es $x_1\, x_2 \in D$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| > L\,|x_1 - x_2|\,,$$

d.h., man kann immer zwei Stellen x_1, x_2 finden, so dass der Anstieg der Sekante zwischen $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ beliebig groß ist.

$\square$

Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sind richtig, und welche sind falsch?

a) f ist stetig, falls für jedes $\hat{x} \in (a, b)$ der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to \hat{x}-} f(x)$ mit dem rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \to \hat{x}+} f(x)$ übereinstimmt.

b) f ist stetig, falls für jedes $\hat{x} \in (a, b)$ der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \hat{x}} f(x)$ existiert.

c) Falls f stetig ist, ist f auch beschränkt.

d) Falls f stetig ist und eine Nullstelle besitzt, aber nicht die Nullfunktion ist, dann gibt es Stellen x_1, $x_2 \in (a, b)$ mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

e) Falls f stetig und monoton ist, wird jeder Wert aus dem Bild von f an genau einer Stelle angenommen.

---

a) *Falsch.* Gegenbeispiel: $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

mit

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = 0\,, \quad \text{jedoch} \quad f(0) = 1\,.$$

Aber: Mit der 'Umdefinition' $f(0) := 0$ wird f stetig.

b) *Richtig.*

Für alle $\hat{x} \in (a, b)$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \hat{x}} f(x)$.

Per definitionem bedeutet dies:

$$\exists\, \hat{y} : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \hat{y} \quad \text{für beliebige Folgen} \quad \{x_n\} \to \hat{x}\,.$$

Betrachte speziell $x_n \equiv \hat{x}$ (konstante Folge):

$\Rightarrow \quad \hat{y} = f(\hat{x})$, somit ist f stetig an $\hat{x}$.

c) *Falsch.* Gegenbeispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, 1)$ stetig, nicht beschränkt.

d) *Falsch.* Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$ auf $(-1, 1)$.

e) *Falsch.* Gegenbeispiel: Jede konstante Funktion ist monoton.

$\square$

a) An welchen Stellen ist die Funktion $f\colon\ \mathbb{R}\setminus\{5\}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\left(\frac{\operatorname{sign}(x)}{x-5}\right)^2$$

stetig bzw. unstetig?

b) Zeigen Sie: Die Betragsfunktion $f(x)=|x|$ ist auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig.

c) Zeigen Sie: Jedes Polynom ist auf jedem beschränkten Intervall $[a,b]$ Lipschitz-stetig.

---

a)

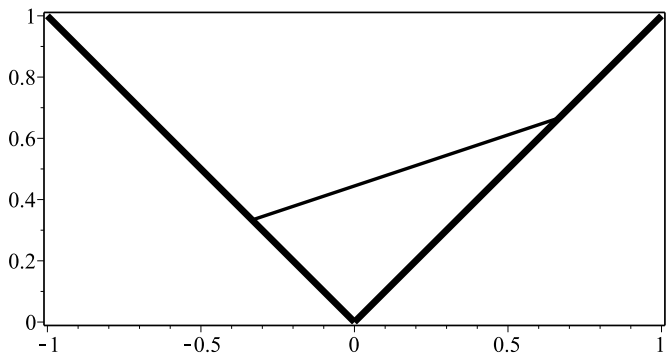
$$f(x)=\left(\frac{\operatorname{sign}(x)}{x-5}\right)^2=\begin{cases}0 & \text{für } x=0,\\ \dfrac{1}{(x-5)^2} & \text{sonst,}\end{cases}$$

- $x=5$: Pol 2. Ordnung
- $x=0$: Sprung der Höhe $1/25$
- ansonsten stetig

b) Für alle $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ folgt aus der inversen Dreiecksungleichung

$$\big|f(x_1)-f(x_2)\big| \;=\; \big||x_1|-|x_2|\big| \;\le\; |x_1-x_2| \qquad \checkmark$$

$\Rightarrow\quad f(x)=|x|$ Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L=1$.



$\longrightarrow$

c) Zeige zunächst: Jedes Monom $f_k(x) = x^k$ $(k \in \mathbb{N})$ ist auf $[a,b]$ Lipschitz-stetig:

Für beliebige $x_1, x_2 \in [a,b]$ gilt

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| \;=\; |x_1^k - x_2^k| \;=\; \Big|\,(x_1 - x_2)\sum_{j=0}^{k-1} x_1^j\, x_2^{k-1-j}\,\Big|$$

$$\leq \Big|\sum_{j=0}^{k-1} x_1^j\, x_2^{k-1-j}\Big|\,|x_1 - x_2| \;\leq\; \underbrace{k\big(\max\{|a|,|b|\}\big)^{k-1}}_{=:\,L_k} \cdot |x_1 - x_2| \quad \checkmark$$

Für $k = 0$ ist $L_0 = 0$ (konstante Funktion).

- Weiters: $c_k\, x^k$ hat Lipschitzkonstante $|c_k| L_k$.
- Generell gilt:

$$f_k \;\ldots\; \text{Lipschitz-stetig mit } L_k \quad \Rightarrow \quad \text{für} \quad f = \sum_{k=0}^{n} c_k\, f_k :$$

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| \;&=\; \Big|\sum_{k=0}^{n} c_k\big(f_k(x_1) - f_k(x_2)\big)\Big| \\
&\leq\; \sum_{k=0}^{n} |c_k|\,\big|f_k(x_1) - f_k(x_2)\big| \qquad [\leftarrow \triangle\text{-}\textit{Ungleichung}] \\
&\leq\; \Big(\sum_{k=0}^{n} |c_k| L_k\Big) \cdot |x_1 - x_2| \;=\; L\,|\,x_1 - x_2\,|
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\text{Polynom} \;\; p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, x^k \;\;\ldots\;\; \text{Lipschitz-stetig auf } [a,b]\,, \text{ mit}$$

$$L \;=\; \sum_{k=0}^{n} |c_k| L_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} |c_k|\, k\,\big(\max\{|a|,|b|\}\big)^{k-1} \qquad \checkmark$$

Anmerkung: Falls $n = \mathrm{Grad}(p) > 1$: $L \to \infty$ für $|b - a| \to \infty$.

$\square$

Zeigen Sie: Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig, siehe Skriptum. Vollziehen Sie den Beweis nach und argumentieren Sie, dass gilt: Es gibt eine Konstante $H > 0$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \;\le\; H\,|x_1 - x_2|^{\kappa} \quad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in [0,1],$$

mit $H > 0$ und $\kappa \in (0,1]$. Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Hölder-Stetigkeit*. Wie lauten die Konstanten H und κ?

Anmerkung: Hölder-Stetigkeit mit $\kappa = 1$ bedeutet Lipschitz-Stetigkeit (mit $L = H$). Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig (warum?).

[vgl. Skriptum S. 95:]

- Zeige zunächst für $x_1, x_2 \in [0,1]$: $|\sqrt{x}_1 - \sqrt{x}_2| \le \sqrt{|x_1 - x_2|}$

  Sei o.B.d.A. $x_1 \ge x_2$, also $-\sqrt{x}_1 \le -\sqrt{x}_2 \quad \Rightarrow$

  $$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + x_2 \;\le\; x_1 - 2\sqrt{x_2}\sqrt{x_2} + x_2 \;=\; |x_1 - x_2| \quad \checkmark$$

  $\Rightarrow$ *Hölder-Stetigkeit* von $f(x) = \sqrt{x}$ mit $H = 1$ und $\kappa = \frac{1}{2}$.

  Anmerkung: Dies gilt auch auf $[0, \infty)$.

- *Jede Hölder-stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist auch gleichmäßig stetig.*

  Beweis: Für beliebiges $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \left(\varepsilon/H\right)^{\frac{1}{\kappa}}$. Aus der Hölder-Stetigkeit folgt nun für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$:

  $$|f(x_1) - f(x_2)| \;\le\; H\,|x_1 - x_2|^{\kappa} \;<\; H\,\delta^{\kappa} \;=\; \varepsilon \qquad \checkmark$$

  Also ist f auch gleichmäßig stetig.

$\square$

Wie ist jeweils der Parameter $c \in \mathbb{R}$ zu wählen, damit die folgenden Funktionen $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ stetig sind?

a) $D = [-1, 1]\,, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2\,x - 3}{x^2 + x - 2}\,, & x \neq 1 \\ c\,, & x = 1 \end{cases}$

b) $D = (0, 1]\,, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6}{x^3 - x}\,, & x \neq 1 \\ c\,, & x = 1 \end{cases}$

Beachte: $f(1) = \text{‘}\,0\,/\,0\,\text{’}$ in beiden Fällen.

a) Für $x \in D \setminus \{1\}$ ist

$$f(x) = \frac{x^2 + 2\,x - 3}{x^2 + x - 2} = \frac{\cancel{(x-1)}\,(x+3)}{\cancel{(x-1)}\,(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

Setzt man für $x = 1$

$$c = \frac{1+3}{1+2} = \frac{4}{3}\,,$$

so ist $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = c$, und f ist stetig.

b) Analog. Wiederum: $x = 1$ ist Nullstelle von Zähler und des Nenner.

Division durch Linearfaktor $(x - 1)$ $\Rightarrow$ Für $x \in D \setminus \{1\}$ ist

$$f(x) = \frac{x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6}{x^3 - x} = \frac{\cancel{(x-1)}\,(x^2 - x - 6)}{\cancel{(x-1)}\,(x^2 + x)} = \frac{(x-3)(x+2)}{x(x+1)}$$

Setzt man für $x = 1$

$$c = \frac{(1-3)(1+2)}{1(1+1)} = -3\,,$$

so ist $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = c$, und f ist stetig.

Anmerkung: Mit der *Regel von de l'Hospital* (Kapitel 9) ist die Bestimmung von $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ einfacher durchzuführen (ohne Polynomdivision).

$\square$

Sei $f\colon\ [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ besitzt in $[a,b]$ mindestens einen *Fixpunkt* $x^* \in [a,b]$, d.h. $x^* \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $x^* = f(x^*)$.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g(x) = x - f(x)$ an.

b) f sei sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$ (eine sogenannte *Kontraktion*). Zeigen Sie: Der Fixpunkt x^* ist eindeutig. Geben Sie auch ein konkretes Beispiel an.

---

a) Laut Voraussetzung gilt $a \le f(x) \le b$ für alle $x \in [a,b]$, insbesondere $f(a) \ge a$ und $f(b) \le b$.

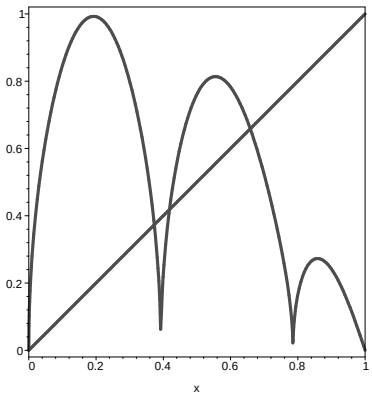
Die Funktion $g(x) = x - f(x)$ ist stetig auf $[a,b]$, mit

$$\begin{aligned} g(a) &= a - f(a) \le a - a = 0 \\ g(b) &= b - f(b) \ge b - b = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad g(a) \le 0 \le g(b)$. Wegen der Stetigkeit von g gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein $x^* \in [a,b]$ mit $g(x^*) = 0$, also $x^* = f(x^*)$. ✓

(Mögliche Sonderfälle: $g(a) = 0$ oder $g(b) = 0$.)

Beispiel: $[a,b] = [0,1]$



b) Für beliebige Fixpunkte x_1 und x_2 von f gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|\,.$$

Andererseits folgt aus der Kontraktivität $(L < 1)$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L\,|x_1 - x_2|\,, \quad \text{also} < |x_1 - x_2| \ \text{ falls } x_1 \ne x_2.$$

$\Rightarrow$ Fixpunkt $x_1 = x_2 = x^*$ ist eindeutig. ✓

$\longrightarrow$

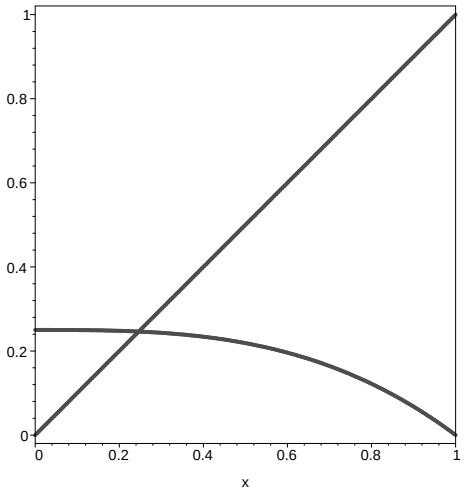
- Beispiel zu b): $f\colon\ [0,1] \to [0,1]$,

$$f(x) \;=\; \tfrac{1}{4}\,(1 - x^3)$$

mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \;=\; \tfrac{1}{4}\,|x_1^3 - x_2^3| \;\le\; \tfrac{1}{4}\,\left|x_1^2 + x_1\,x_2 + x_2^2\right| \cdot |x_1 - x_2|$$
$$\le\; \tfrac{3}{4}\,|x_1 - x_2| \quad \text{für} \quad x_1, x_2 \in [0,1]$$

$\Rightarrow \quad f$ ist Kontraktion auf $[0,1]$, mit $L = {}^3\!/_4 \;<\; 1$.



- Anmerkung zu b): Die *Fixpunkt-Iteration*

$$x_{i+1} := f(x_i)\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots\,, \qquad \text{mit Startwert } x_0 \in [a,b]$$

konvergiert gegen den Fixpunkt x^* (siehe Kapitel 11).

$\square$

(*) Gegeben sei eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Zwischenwerteigenschaft: Sind $y_1, y_2 \in f([a,b])$, so ist $y \in f([a,b])$ für jedes y zwischen y_1 und y_2. Ist f notwendigerweise stetig?

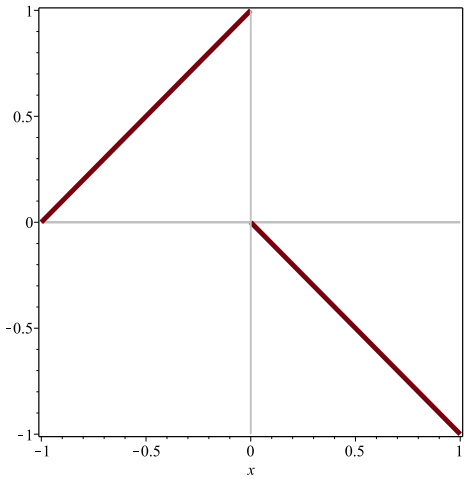
Hinweis: Überlegen Sie, ob eine Funktion mit einer typischen Unstetigkeit die Eigenschaft erfüllen kann.

---

f ist <u>nicht</u> notwendigerweise stetig,
d.h., aus dieser Zwischenwerteigenschaft folgt nicht die Stetigkeit.

Betrachte z.B. $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x+1\,, & x \in [-1,0]\,, \\ -x\,, & x \in (0,1] \end{cases}$$



- f ist unstetig an $x = 0$; $f([-1,1]) = [-1,1]$
- f besitzt obige Zwischenwerteigenschaft:

  $y_1, y_2 \in [-1,1] \quad \Rightarrow \quad \forall\, y \in [y_1, y_2] \;\; \exists\, x \in [-1,1] : \quad y = f(x) \quad \checkmark$

Genauer: 3 Fälle

(i) $0 \le y_1 < y < y_2 \le 1$: $y = f(x)$ mit $x = y - 1$ (linker Ast, stetig)

(ii) $-1 \le y_1 < y < y_2 < 0$: $y = f(x)$ mit $x = -y$ (rechter Ast, stetig)

(iii) $y_1 < y < y_2$ mit $-1 \le y_1 \le 0$, $0 < y_2 \le 1$:
- $y < 0$: rechter Ast
- $y \ge 0$: linker Ast

Anmerkung: Anschaulich bedeutet die Zwischenwerteigenschaft:

Blicke in waagrechter Richtung auf den Graphen von f. Da ist keine 'Lücke'. Dies impliziert nicht die Stetigkeit.

$\square$

(**) Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $x \in (a,b)$ existiert ein $\xi \in (x,b]$ mit $f(\xi) > f(x)$.

(ii) Für $x = a$ gilt Eigenschaft (i) *nicht*.

Zeigen Sie: Es gilt $f(x) \le f(b)$ für alle $x \in (a,b)$, sowie $f(a) = f(b)$.

(i) *Behauptung:* $f(x) \le f(b)$ für alle $x \in (a,b)$

Beweis: indirekt. Annahme: $\exists\, x \in (a,b)$ mit $f(x) > f(b)$ ◀

Zu diesem x sei

$$\textbf{(M)}: \qquad x_M := \arg\max_{z \in [x,b]} f(z) \qquad (f \text{ ist stetig angenommen})$$

(x_M muss nicht eindeutig sein.) Laut erster Voraussetzung über f gilt

$$f(x_M) > f(x)$$

Daher laut indirekter Annahme ◀

$$\underline{f(x_M)} > f(x) \underline{> f(b)} \quad \Rightarrow \quad x_M \neq b, \quad \text{d.h. } x_M < b.$$

Weiters: Laut Voraussetzung (i) gilt

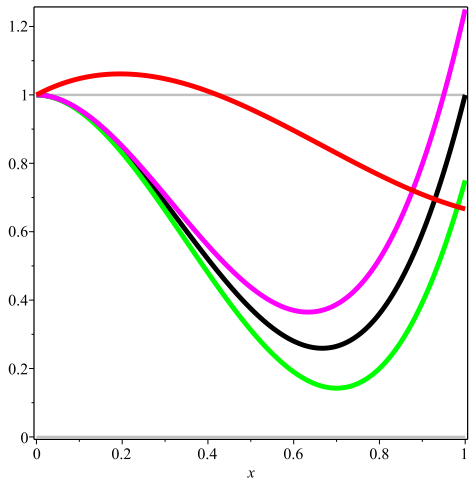
$\exists\, \xi \in (x_M, b]$ mit $f(\xi) > f(x_M)$ ... *Widerspruch zu* **(M)**. ✓

Anmerkung: Voraussetzung (ii),

$$\nexists\, \xi \in (a,b] \quad \text{mit} \quad f(\xi) > f(a)$$

wurde hier nicht verwendet. Die Grafik zeigt 4 Funktionen:

- beide Voraussetzungen erfüllt
- nur Voraussetzung (i) erfüllt
- nur Voraussetzung (ii) erfüllt
- beide Voraussetzungen verletzt



⟶

(ii) *Behauptung:* $f(a) = f(b)$

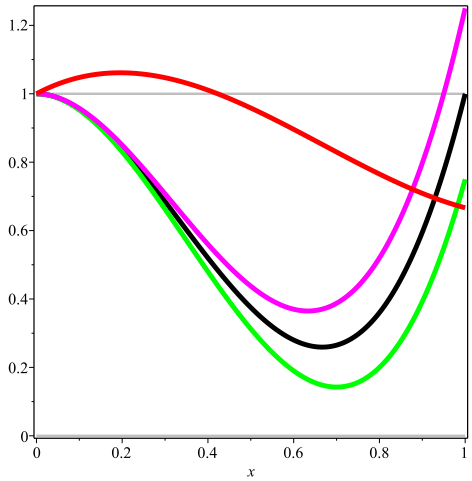
Beweis: Aufgrund von Voraussetzung (ii) gilt $f(a) \geq f(b)$.

Indirekt. Annahme: $f(a) > f(b)$ ◀

Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen (für $f(x) - f(b)$) $\Rightarrow$

$\exists\, x \in (a, b) \;:\; f(x) > f(b)$ (x hinreichend nahe an a)

... *Widerspruch zu* **(i)** . ✓



Anmerkung zum Beweis:

Intuitive, 'optische' Umsetzung der Voraussetzungen über f legt nahe, dass diesen etwa der Verlauf der schwarzen Funktion entspricht. Ohne diese Anschauung ist es nicht einfach, den Beweis zu führen.

□

Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + a\,x + 6}{(x-2)^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 4\,x + a}{x^2 - 1}$

---

a) Nullstellen des Zählers $x^2 + a\,x + 6$:

$$x_{1,2} \;=\; -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 6}$$

? Kann $x_{1,2} = 2$ sein? ... rechnen ...

Besser mit Polynomdivision:

```
        x^2 + a*x + 6   /   x - 2   =   x + (a+2)
-       x^2 - 2*x
        -------------
            (a+2)*x + 6
-           (a+2)*x - 2*(a+2)
            ---------------------
                      6 + 2*(a+2)   =   2*a+10   (Rest)
```

$\rightsquigarrow$

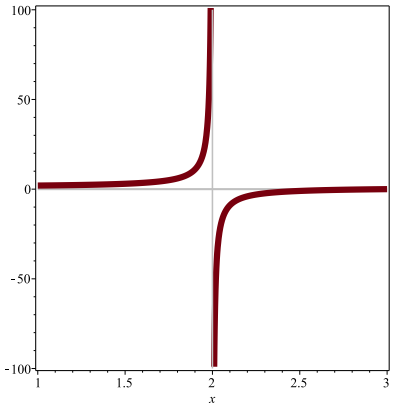
- Zähler durch $(x-2)$ teilbar für $a = -5$
- Dann ist $x + (a+2) = x - 3 \neq x - 2$.

$\Rightarrow$ 2 Fälle:

(i) $a = -5$ ... Pol 1. Ordnung an $x = 2$:

$$f(x) \;=\; \frac{\cancel{(x-2)}\,(x-3)}{\cancel{(x-2)}\,(x-2)} \;=\; \frac{x-3}{x-2}$$

(ii) $a \neq -5$ ... Pol 2. Ordnung an $x = 2$.



Grafik zeigt Fall (i).

Für $a \neq -5$ qualitativ anderes Verhalten!

$\longrightarrow$

b) Wiederum Polynomdivision (beachte $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$) :

```
      x^2 + 4*x + a   /   x - 1   =   x + 5
-     x^2 -   x
      -------------
            5*x + a
-           5*x - 5
            -----------
                  a + 5  (Rest)
```

$\rightsquigarrow$ Zähler durch $(x-1)$ teilbar für $a = -5$

Und:

```
      x^2 + 4*x + a   /   x + 1   =   x + 3
-     x^2 +   x
      -------------
            3*x + a
-           3*x + 3
            -----------
                  a - 3  (Rest)
```

$\rightsquigarrow$ Zähler durch $(x+1)$ teilbar für $a = 3$

$\Rightarrow$ 3 Fälle:

(i) $a = -5$ ... Pol 1. Ordnung an $x = -1$:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}\,(x+5)}{\cancel{(x-1)}\,(x+1)} = \frac{x+5}{x+1}$$

(ii) $a = 3$ ... Pol 1. Ordnung an $x = 1$:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x+1)}\,(x+3)}{\cancel{(x+1)}\,(x-1)} = \frac{x+3}{x-1}$$

(iii) Allgemeiner ('generischer') Fall:

Je ein Pol 1. Ordnung an $x = -1$ und $x = 1$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 4\,x + a}{(x-1)(x+1)}\,,$$

Zähler und Nenner haben keine gemeinsamen Nullstellen.

$\square$

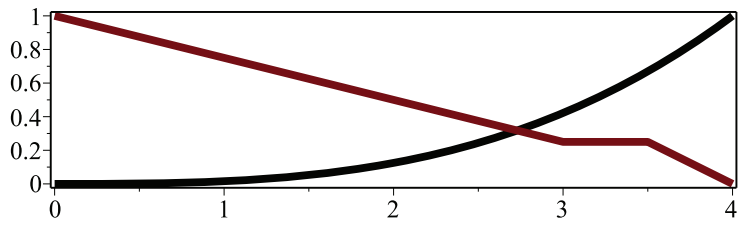
Ein Anwendungsproblem:

Martin wandert in vier Stunden am Vormittag von Adorf nach Bstadt (stellen Sie sich eine geradlinig verlaufende Straße vor, aber das ist im Prinzip egal). In Bstadt macht er Mittagspause. Am Nachmittag wandert er in vier Stunden wieder nach Adorf zurück.

a) Zeigen Sie: Es gibt mindestens eine Stelle x^* zwischen Adorf und Bstadt, die er auf beiden Wanderungen nach der gleichen Zeitspanne t^* erreicht.

b) Angenommen, Martin geht immer nur vorwärts in Richtung seines Zieles, d.h. er kehrt nie um und bleibt nie stehen. Zeigen Sie: t^* und x^* sind eindeutig.

c) Angenommen, Martin legt auf dem Hinweg oder/und auf dem Rückweg zwischendurch eine Pause ein ☕ (3 Möglichkeiten). In welchen Fällen bleibt die Aussage aus b) bezüglich der Eindeutigkeit von t^* bzw. von x^* sicher richtig und wann nicht?



a) Martin legt eine Wegstrecke von $x = a$ (Start in Adorf) bis $x = b$ (Ziel in Bstadt) in $T = 4$ Stunden zurück, und retour. Sei

- $h(t)$ = Position beim Hinweg nach t Stunden,

  $h\colon [0,T] \to [a,b], \quad \text{mit} \;\; h(0) = a, \;\; h(T) = b\,, \qquad$ sowie

- $z(t)$ = Position beim Rückweg nach t Stunden,

  $z\colon [0,T] \to [a,b], \quad \text{mit} \;\; z(0) = b, \;\; z(T) = a\,.$

- Für die stetige Funktion $f(t) := h(t) - z(t)$ gilt

  $f(0) = a - b < 0 \quad \text{und} \quad f(T) = b - a > 0\,.$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$

Es existiert mindestens ein $t^* \in [0,T]$ mit $f(t^*) = 0$, d.h. $h(t^*) = z(t^*)$. Dies passiert an der Position

$$x^* = h(t^*) = z(t^*)\,. \qquad \checkmark$$

$\longrightarrow$

b) In diesem Fall ist

- $h(t)$ streng monoton wachsend,
- $z(t)$ streng monoton fallend,

$\Rightarrow$ $f(t) = h(t) - z(t)$ streng monoton wachsend $\Rightarrow$ injektiv.

$\Rightarrow$ t^* ist eindeutig, somit auch x^*. ✓

c) $h(t)$ monoton, aber nicht streng monoton $\Rightarrow$

$$\exists\ [t_h, T_h] \subseteq [0, T],\ t_h < T_h, \quad \text{mit } h(t) = \text{const. auf } [t_h, T_h]$$

Beweis: Nicht streng monoton bedeutet: $\exists\ t_h < T_h$ mit $h(t_h) = h(T_h)$.

$\Rightarrow$ $h(t_h) = h(t) = h(T_h) = \text{const.}$ für alle $t \in [t_h, T_h]$
aufgrund der Monotonie von h. Analog für $z(t)$.

Interpretation: $[t_h, T_h]$ ist die Jausenzeit, und $h(t_h)$ ist das Ruheplätzchen.

(Auch mehrere Pausen denkbar – oder sogar unendlich viele ??)

- 3 Fälle:

(i) $h(t)$ nicht streng monoton, $z(t)$ streng monoton $\Rightarrow$
$f(t) = h(t) - z(t)$ immer noch streng monoton. t^*, x^* eindeutig.

(ii) $h(t)$ streng monoton, $z(t)$ nicht streng monoton: analog zu (i).

(iii) Weder $h(t)$ noch $z(t)$ streng monoton:
Betrachte $P_h := [t_h, T_h]$, $P_z := [t_z, T_z]$ (siehe oben), sowie

$$P := P_h \cap P_z$$

<u>Falls</u> $\exists\ t^\circ \in \overset{\circ}{P}$ mit $x^* := h(t^\circ) = z(t^\circ)$, dann gilt

$$(t^\circ - \varepsilon, t^\circ + \varepsilon) \subseteq \overset{\circ}{P} \quad \text{für hinreichend kleines } \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow$ $h(t^*) = z(t^*) = x^*$ für alle $t^* \in (t^\circ - \varepsilon, t^\circ + \varepsilon)$.

$\Rightarrow$ t^* nicht eindeutig.

Aber: x^* nach wie vor eindeutig, weil $\overset{\circ}{P}$ ein Intervall ist. (Skizze!)

Break ☺

□