Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$:

a) $x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18$

b) $x^3 + x^2 - q^2\,x - q^2, \quad q \in \mathbb{R}\,.$

Für welche Werte von c treten mehrfache Nullstellen (doppelt, dreifach) auf?

Hinweis: Erraten sie jeweils eine der Nullstellen.

---

a) Man errät die Nullstelle $x_1 = 2$. Dann Polynomdivision:

```
 x^3 - 2*x^2 - 9*x + 18  /  (x - 2)  =  x^2 - 9
 x^3 - 2*x^2
------------------------
           0 - 9*x + 18
             - 9*x + 18
            ------------
                      0
```

$\Rightarrow \qquad x_2 = 3,\ x_3 = -3; \quad x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18 \;=\; (x-2)(x-3)(x+3)$

b) Man errät alle Nullstellen: $x_{1,2,3} = -1, q, -q$.

Oder mittels Polynomdivision (z.B. mit $x_1 = -1$) :

```
 x^3 + x^2 - q^2*x - q^2  /  (x + 1)  =  x^2 - q^2
 x^3 + x^2
-------------------------
         0 - q^2*x - q^2
           - q^2*x - q^2
          ---------------
                       0
```

Analog bei Division durch $(x - x_2) = (x - q)$ oder $(x - x_3) = (x + q)$.

Es ist

$$x^3 + x^2 - q^2\,x - q^2 \;=\; (x+1)(x-q)(x+q)$$

- Doppelte Nullstelle für:

  $q = -1 \ (x_1 = x_2)\,,\ q = 1 \ (x_1 = x_3)$ oder $q = 0 \ (x_2 = x_3)$.

- Dreifache Nullstelle nicht möglich. $\square$

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) $\dfrac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18}$ **b)** $\dfrac{x}{x^3 + x^2 - q^2\,x - q^2}\,, \quad q \in \mathbb{R}$

Zu b): Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte von q).

(siehe Aufgabe 1)

a) Nullstellen des Zählers: $x_1 = 1$, und $\underline{x_2 = 2}$ = Nullstelle des Nenners. $\Rightarrow$

$$\frac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18} = \frac{3\,(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)(x+3)}$$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{3\,(x-1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$\rightsquigarrow$

$$3\,(x-1) = A\,(x+3) + B(x-3)$$

$$x = 3: \quad 6 = 6\,A \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$x = -3: \quad -12 = -6\,B \quad \Rightarrow \quad B = 2$$

Also

$$\frac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3}$$

Anmerkung:

Auch O.K., ohne vorher ~~Durchzukürzen~~, aber mehr Rechenarbeit.
Koeffizient von $1/(x-2)$ ergibt sich zu 0.

$\longrightarrow$

b)

$$\frac{x}{x^3+x^2-q^2\,x-q^2} = \frac{x}{(x+1)(x-q)(x+q)}$$

'Generischer' Ansatz:

$$\frac{x}{(x+1)(x-q)(x+q)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-q} + \frac{C}{x+q}$$

$\rightsquigarrow$

$$x = A\,(x-q)(x+q) + B(x+1)(x+q) + C(x+1)(x-q)$$

$$x=-1: \qquad -1 = A\,(-1-q)(-1+q) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{q^2-1}$$

$$x=\ q: \qquad q = B\,(q+1)(q+q) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2\,(q+1)}$$

$$x=-q: \qquad -q = C\,(-q+1)(-q-q) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2\,(1-q)}$$

... aber <u>anders</u> für 'konfluente' Fälle

(mehrfache Nullstellen, Sonderfälle $q = 0, 1, -1$)

- $q = 0$: Man erhält eindeutige Darstellung

$$\frac{x}{(x+1)\,x^2} = \frac{1}{(x+1)\,x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

- $q = 1$: Ansatz

$$\frac{x}{(x+1)^2\,(x-1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B}{x-1}$$

$\rightsquigarrow$ Rechnung ergibt

$$A_1 = -\frac{1}{4}\,, \quad A_2 = \frac{1}{2}\,, \quad B = \frac{1}{4}$$

- $q = -1$: Genau wie für $q = 1$, weil nur abhängig von q^2.

Anmerkung:

– 'Generischer' Fall: drei Pole 1. Ordnung

– Sonderfälle: je ein Pol 1. Ordnung, ein Pol 2. Ordnung

□

Man bestimme das jeweilige eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \ldots 3\}$ (mit $c \in \mathbb{R}$):

a) $\{\,(-2,+c),\ (-1,+c),\ (+1,+c),\ (+2,+c)\,\}$ (konstante Daten)

b) $\{\,(-2,+c),\ (-1,-c),\ (+1,-c),\ (+2,+c)\,\}$ ('gerade' Daten)

c) $\{\,(-2,+c),\ (-1,-c),\ (+1,+c),\ (+2,-c)\,\}$ ('ungerade' Daten)

d) $\{\,(-2,+c),\ (-1,-c),\ (+1,-c),\ (+2,-c)\,\}$ (allgemeine Daten)

\+ Auswertung an $x = 0$.

- Lagrange-Polynome zu den Knoten $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{-2, -1, +1, +2\}$:

$$\varphi_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = -\frac{1}{12}(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{6}(x+2)(x-1)(x-2)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{1}{6}(x+2)(x+1)(x-2)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{12}(x+2)(x+1)(x-1)$$

  mit $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$.

- Eindeutiges Interpolationspolynom: $p(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i\,\varphi_i(x)$,

  oder (alternativ) mittels Ansatz $p(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j\,x^j$ und Lösen des linearen Gleichungssystems $\{p(x_i) = y_i,\ i = 0 \ldots 3\}$ nach den Koeffizienten a_j.

- Das Interpolationspolynom kann auch einen geringeren Grad als 3 haben (dies hängt von den Daten ab, insbesondere von deren Symmetrieeigenschaften).

a) Man sieht: $p(x) \equiv +c$ (Grad 0, d.h. konstant)

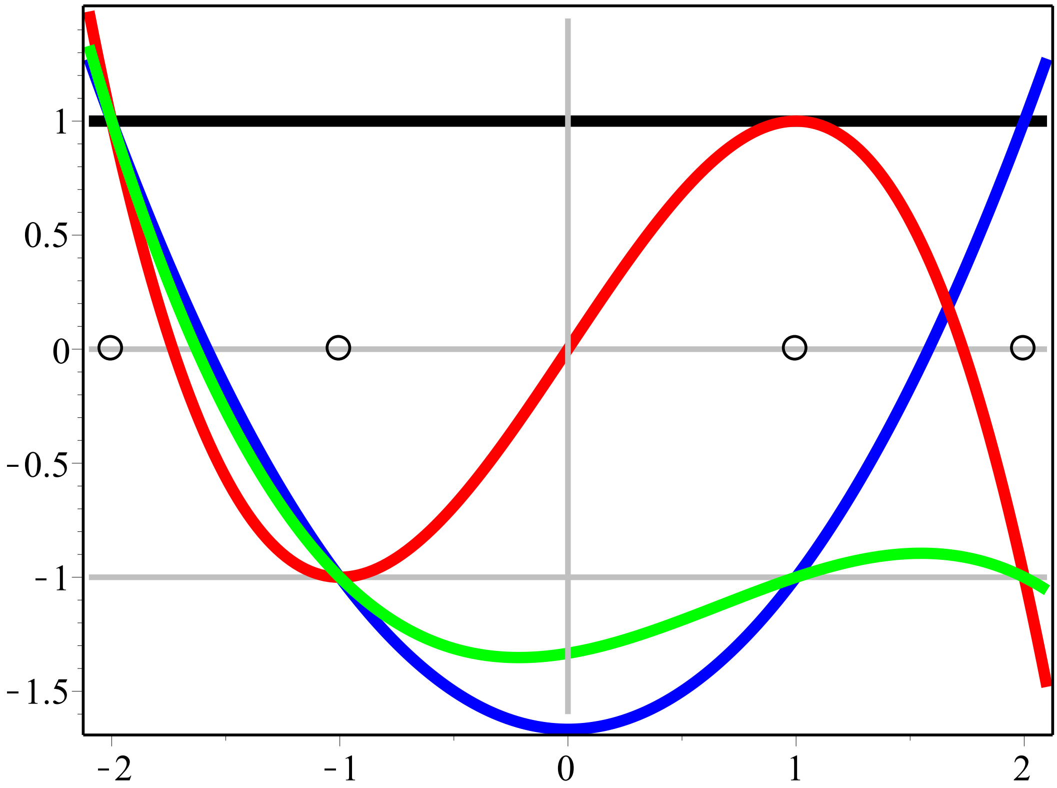
b) Rechnung ergibt $p(x) = -\frac{5c}{3} + \frac{2c}{3}x^2$ (Grad 2, gerade); $p(0) = -\frac{5c}{3}$

c) Rechnung ergibt $p(x) = \frac{3c}{2}x - \frac{c}{2}x^3$ (Grad 3, ungerade); $p(0) = 0$

d) Rechnung ergibt $p(x) = -\frac{4c}{3} + \frac{c}{6}x + \frac{c}{3}x^2 - \frac{c}{6}x^3$ (Grad 3, allgemein); $p(0) = -\frac{4c}{3}$

$\longrightarrow$

F



Gegeben sei die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

a) Zeigen Sie: $f(x)$ ist auf $(0,1)$ und auf $(1,\infty)$ streng monoton. Wo ist f fallend, wo wachsend?

b) Wie lautet der Wert von $\min\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f(x)$?

c) Wie in a), b), aber für $g(x) = \exp(f(x))$.

d) Wie in a), b), aber für $g(x) = \big(f(x)\big)^{-2}$.

---

a) Beachte

$$x_1 + \frac{1}{x_1} \ \substack{>\\<}\ x_2 + \frac{1}{x_2} \quad\Leftrightarrow\quad x_1 - x_2 \ \substack{>\\<}\ \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1\,x_2}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_2 - x_1 \ \substack{<\\>}\ \frac{x_2 - x_1}{x_1\,x_2}$$

$\Rightarrow$

(i) : $x_1 < x_2$ in $(0,1)$: $x_1\,x_2 < 1$, daher monoton $\downarrow$ ✓

(ii) : $x_1 < x_2$, beide > 1 : $x_1\,x_2 > 1$, daher monoton $\uparrow$ ✓

Anmerkung: Schreibweise mit ‘kleiner bzw. größer’ ($\substack{>\\<}$) kompakt, aber unübersichtlich. Deutlicher: (i), (ii) getrennt anschreiben.

b) Aus a) folgt

$$\min_{x\in\mathbb{R}_+} f(x) = f(1) = 2\,.$$

c) $g(y) = \exp(y)$ monoton wachsend $\Rightarrow$ Antwort wie unter a) (Monotonie bleibt jeweils erhalten), mit $\min\limits_{x\in\mathbb{R}_+} \exp(f(x)) = e^2$.

d) $g(y) = y^{-2}$ monoton fallend $\Rightarrow$ Antwort unter a) kehrt sich um (Monotonieverhalten kehrt sich genau um), mit $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}_+} (f(x))^{-2} = 0$ (wird nicht als min angenommen), und $\max\limits_{x\in\mathbb{R}_+} (f(x))^{-2} = 2^{-2} = 1/4$.

Anmerkung zu d): Für g monoton $\downarrow$:

$$f(x_1) < f(x_2) \ \Rightarrow\ g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \quad \text{und umgekehrt.}$$

$\square$

Überlegen Sie sich basierend auf der Definition der Euler'schen Zahl e eine Funktion $f(t)$, für die gilt

$$\lim_{t \to 0+} f(t) = e\,,$$

wobei jedoch $f(0)$ nicht direkt auswertbar ist (hebbare Unstetigkeit). Approximieren Sie nun e numerisch, indem Sie $f(t)$ an den Stellen $t = 0.1,\ 0.2,\ 0.3$ durch ein Polynom vom Grad 2 interpolieren und an der Stelle $t = 0$ auswerten.

Anmerkung: Eine derartige Vorgangsweise wird als *Extrapolation* bezeichnet und leistet in vielen anderen Zusammenhängen nützliche Dienste. Die hier berechnete Approximation von e ist jedoch nicht besonders genau. Wie könnte man sie verbessern?

Mit $t = 1/n$ gilt

$$e \;=\; \lim_{n \to \infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \;=\; \lim_{t \to 0+} \underbrace{\big(1 + t\big)^{1/t}}_{f(t)},$$

wobei $f(0)$ nicht direkt auswertbar.

Mit

$$\begin{aligned} f(0.1) &= \Big(1 + \frac{1}{10}\Big)^{10} = 2.59374\ldots \\ f(0.2) &= \Big(1 + \frac{2}{10}\Big)^{10/2} = 2.48832\ldots \\ f(0.3) &= \Big(1 + \frac{3}{10}\Big)^{10/3} = 2.39779\ldots \end{aligned}$$

ergibt Interpolation und Auswertung an $t = 0$:

$$p(0) = \underline{2.71}405\ldots \approx e = \underline{2.71}828\ldots$$

Verbesserte Variante:
mehr Auswertungen näher an 0, Interpolation mit höherem Grad

Aber: 'zu nahe an 0' und 'zu hoher Polynomgrad' funktioniert nicht aufgrund *numerischer Instabilität.* Optimale Variante hängt von verwendeter Arithmetik und erwünschter Genauigkeit ab.

$\square$

a) (*) Der Beginn der Exponentialreihe, mit festem $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x \;=\; \exp(x) \;\approx\; E_n(x) \;:=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

liefert eine Approximation für e^x, die für 'kleines' x sinnvoll ist (immer genauer für immer kleineres $|x|$). Für $x < 0$ handelt es sich um eine alternierende Reihe. Geben Sie für den Fall $x < 0$ eine rigorose Abschätzung für den Fehler $|E_n(x) - e^x|$ in Abhängigkeit von x an.

Anmerkung: Eine sehr ähnliche Fehlerabschätzung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. (in VO: später).

b) Eine zeitabhängige Größe $X = X(t)$ gehorche dem Gesetz $X(t) = C\,e^{\lambda t}$, $t \geq 0$, mit $C > 0$ und der Abklingrate $\lambda < 0$. (Falls wir z.B. die Zeit in Stunden [h] messen, dann hat λ die Dimension 'pro Stunde', also $[\mathrm{h}^{-1}]$.)

Der Anfangswert C und die Abklingrate λ seien unbekannt, aber bekannt sind Messwerte $0 < X_1 = X(t_1)$ und $0 < X_2 = X(t_2) < X_1$ zu zwei Zeitpunkten $t_2 > t_1 > 0$. Geben Sie Formelausdrücke an (in Abhängigkeit von t_1, t_2, X_1, X_2) für die Werte von C, λ und die für die betreffende Halbwertzeit $T_{1/2}$. Stellen Sie C in der Form $C = X_1^{\gamma_1} + X_2^{\gamma_2}$ dar, mit geeigneten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

---

a) Es gilt

$$\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right| \;\leq\; \left|\frac{x^k}{k!}\right| \quad \text{für} \quad k+1 \;\geq\; |x|$$

$\Rightarrow$ Für $x < 0$ und ab einem hinreichend großen Index k erfüllt die alternierende Reihe die Bedingungen des Leibniz-Kriteriums (Satz 5.5). Satz 5.6 ist anwendbar und zeigt:

$$|E_n(x) - e^x| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Anmerkung: Inspektion des Beweises von Satz 5.6 zeigt, dass es ausreicht, dass die Leibniz-Bedingung für alle hinreichend großen Indizes k erfüllt ist.

$\longrightarrow$

b) Exponentiell abklingender Prozess:

$$X(t) \;=\; C\, e^{\lambda t} \quad \text{mit} \quad \lambda < 0$$

- Aus

$$X(t_1) \;=\; C\, e^{\lambda\, t_1} \;=\; X_1$$
$$X(t_2) \;=\; C\, e^{\lambda\, t_2} \;=\; X_2 \;<\; X_1$$

folgt mittels Division

$$\frac{X_2}{X_1} \;=\; \frac{\cancel{C}\, e^{\lambda\, t_2}}{\cancel{C}\, e^{\lambda\, t_1}} \;=\; e^{\lambda\,(t_2 - t_1)} \quad\Rightarrow\quad \lambda \;=\; \frac{\ln(X_2/X_1)}{t_2 - t_1} \;=\; \frac{\ln X_2 - \ln X_1}{t_2 - t_1}$$

- Weiters:

$$C \;=\; \frac{X_1}{e^{\lambda\, t_1}} \;=\; X_1\, e^{-\lambda\, t_1} \;=\; X_1\, e^{\ln(X_1/X_2)\,\frac{t_1}{t_2 - t_1}} \;=\; X_1 \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{\frac{t_1}{t_2 - t_1}}$$
$$=\; X_1^{1 + \frac{t_1}{t_2 - t_1}}\, X_2^{\frac{t_1}{t_2 - t_1}} \;=\; X_1^{\frac{t_2}{t_2 - t_1}}\, X_2^{\frac{t_1}{t_2 - t_1}}$$

- Halbwertzeit (vgl. VO):

$$T_{1/2} \;=\; \frac{\ln 2}{|\lambda|} \quad \text{mit obigem } \lambda\,.$$

$\square$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Exponentialfunktion den Limes

$$\lim_{x \to 0} (\ln(1+x) - x)$$

b) Wir werten die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ am Rechner aus, für $x = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$, usw. Hier eine Tabelle der auf 10 Dezimalstellen exakt gerundeten Werte:

```
   x       f(x) = ln(1+x)
-----------------------------
  1e-01    0.95310179804e-01
  1e-02    0.99503308532e-02
  1e-03    0.99950033308e-03
  1e-04    0.99995000333e-04
  1e-05    0.99999500003e-05
  1e-06    0.99999950000e-05
  1e-07    0.99999995000e-07
  1e-08    0.99999999500e-08
  1e-09    0.99999999950e-09
  1e-10    0.99999999995e-10
```

Versuchen Sie aufgrund der Tabelle zu erkennen, welches quadratische Polynom $q(x)$ für kleine x offenbar eine sehr gute Approximation von $f(x)$ darstellt.

c) Die Relation $\ln(1+x) \approx q(x)$ ($q(x)$ aus b)) kann man auch schreiben als $\exp(q(x)) \approx 1+x$. Entwicklen Sie $\exp(q(x))$ in eine Reihe, d.h., bestimmen Sie die ersten Terme dieser Entwicklung und vergleichen diese mit $1+x$. Was sieht man?

---

a) 'e hoch' ergibt:

$$\begin{aligned} \exp(\ln(1+x) - x) &= \exp(\ln(1+x)) \cdot \exp(-x) \\ &= (1+x)\,e^{-x} \to 1\,, \quad x \to 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ wegen Stetigkeit von $\ln$:

$$\ln((1+x) - x) = \ln(\exp(\ln(1+x) - x)) \to \ln 1 = 0\,, \quad x \to 0\,.$$

Daher: $\ln x \approx x$ für kleine $|x|$.

b) Man erkennt:

$$\ln(1+x) \approx q(x) = x - \frac{x^2}{2} \quad \text{für kleine } |x|\,.$$

$\longrightarrow$

c) Ansatz: $q(x) = 0 + a_1\,x + a_2\,x^2 \quad \rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
1 + x \;\approx\; \exp(q(x)) \;&=\; 1 + q(x) + \frac{q(x)^2}{2!} + \ldots \\
&=\; 1 + (a_1\,x + a_2\,x^2) + \frac{a_1^2\,x^2 + 2\,a_1\,a_2\,x^3 + a_2^2\,x^4}{2} + \ldots \\
&=\; 1 + a_1\,x + (a_2 + \tfrac{a_1^2}{2})\,x^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow$

$$a_1 \;=\; 1 \quad \text{und} \quad a_2 + \frac{a_1^2}{2} = 0\,, \quad \text{also} \quad a_2 \;=\; -\,\frac{1}{2}\,,$$

d.h.

$$q(x) \;=\; x - \frac{x^2}{2}\,, \quad \text{siehe b).}$$

$\square$

a) Zeigen Sie: $|\cos(x+\varepsilon) - \cos x| \;\leq\; \sqrt{2}\,(1-\cos\varepsilon)$

Anmerkung/Hinweis: Dadurch kann man z.B. den Effekt einer kleinen Störung ε des Winkels x auf den Wert des Cosinus abschätzen.

Zum Beweis greife man auf die berühmte *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* zurück (die in 'Lineare Algebra' bewiesen wird), und zwar in der vereinfachten Variante

$$|\,a_1\,b_1 + a_2\,b_2\,| \;\leq\; \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Anmerkung: Die Abschätzung ist nicht 100 % 'scharf', sie gilt jedoch für beliebige x und ε.

b) Beweisen Sie die trigonometrischen Identitäten:

$$\text{(i)}\quad \sin 2x \;=\; \frac{2\,\tan x}{1+\tan^2 x}\,, \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \cos 2x \;=\; \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\,.$$

c) Zeigen Sie:

$$\arcsin\xi + \arcsin\eta \;=\; \arcsin\left(\xi\sqrt{1-\eta^2} + \eta\sqrt{1-\xi^2}\right) \quad \text{für} \quad \xi^2+\eta^2 \leq 1\,.$$

---

a) Verwende Additionstheorem für cos :

$$\begin{aligned}\cos(x+\varepsilon) - \cos x \;&=\; \cos x\,\cos\varepsilon \;-\; \sin x\,\sin\varepsilon - \cos x\\ &=\; \cos x\,(\cos\varepsilon - 1) \;-\; \sin x\,\sin\varepsilon\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung anwenden

(mit $a_1 = \cos x,\ a_2 = -\sin x,\ b_1 = (\cos\varepsilon - 1),\ b_2 = \sin\varepsilon$) $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}&|\cos x\,(\cos\varepsilon - 1) \;-\; \sin x\,\sin\varepsilon| \;\leq\\ &\leq\; \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}\,\sqrt{(\cos\varepsilon - 1)^2 + \sin^2\varepsilon}\\ &=\; 1\cdot\sqrt{\cos^2\varepsilon - 2\cos\varepsilon + 1 \,+\, \sin^2\varepsilon}\\ &=\; \sqrt{2 - 2\cos\varepsilon} \quad \checkmark\end{aligned}$$

$\longrightarrow$

b) Verwende Additionstheoreme für sin, cos; forme um:

$$\sin 2x = 2\,\sin x\,\cos x = 2\,\tan x\,\cos^2 x = 2\,\tan x\,\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

$$= 2\,\tan x\,\frac{1}{1+\tan^2 x} \quad \checkmark$$

und

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \quad \checkmark$$

Anmerkung: Gilt jeweils für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$ (wo $\tan x$ endlich).

b) Wende links sin an:

$$\sin(\arcsin\xi + \arcsin\eta)$$

$$= \sin(\arcsin\xi)\,\cos(\arcsin\eta) + \cos(\arcsin\xi)\,\sin(\arcsin\eta)$$

$$= \xi\,\sqrt{1-\eta^2} + \sqrt{1-\xi^2}\,\eta$$

$$\Rightarrow \quad \checkmark$$

$\square$

a) Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen sinh und cosh nach:

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm y) &= \sinh x \, \cosh y \pm \cosh x \, \sinh y \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \, \cosh y \pm \sinh x \, \sinh y\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: $\sinh x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) Für $\sinh(x+y)$:

$$4 \sinh(x+y) = 2\left(e^{x+y} - e^{-x-y}\right)$$

Vergleiche mit

$$\begin{aligned}&4\left(\sinh x \, \cosh y + \cosh x \, \sinh y\right) \\ &= \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^y + e^{-y}\right) + \left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^y - e^{-y}\right) \\ &= \left(e^{x+y} + \cancel{e^{x-y}} - \cancel{e^{-x+y}} - e^{-x-y}\right) + \left(e^{x+y} - \cancel{e^{x-y}} + \cancel{e^{-x+y}} - e^{-x-y}\right) \\ &= 2\left(e^{x+y} - e^{-x-y}\right) \quad \checkmark\end{aligned}$$

Analog für die anderen Fälle.

b) Für $x_1 < x_2$ gilt

$$e^{x_1} - e^{-x_1} < e^{x_2} - e^{-x_2} \quad \checkmark$$

da e^x streng monoton wachsend und e^{-x} streng monoton fallend.

$\square$

(*) Um die Entfernung eines Meteoriten M von der Erde zu messen, wird dieser von zwei verschiedenen Stellen A und B aus angepeilt. Sei $l = \overline{AB}$ der (bekannte) Abstand zwischen A und B. Die drei Punkte A, B und M liegen auf einem Dreieck in einer gemeinsamen Ebene, und gemessen werden die Winkel α, β zwischen den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AM}$ bzw. zwischen $\overline{AB}$ und $\overline{BM}$.

a) Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass wir a priori wissen, dass das Dreieck ABM gleichschenkelig ist, d.h., wir benötigen nur eine Messung für $\alpha = \beta$. Wie weit ist M von A entfernt?

b) Eine derartige Messung ist unvermeidlicherweise fehlerbehaftet, d.h., der gemessene Wert ist $\tilde{\alpha} = \alpha\,(1+\varepsilon)$ mit einem kleinen relativen Messfehler $\varepsilon = \frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\alpha}$.

Geben Sie eine Schätzung dafür an, wie stark sich dieser Messfehler auf den daraus errechneten Abstand $L = \overline{AM}$ auswirkt (in Abhängigkeit von l, α und ε.) Schreiben Sie dies in der Form $\tilde{L} = L\,(1+\delta)$ mit dem relativen Fehlereffekt δ.

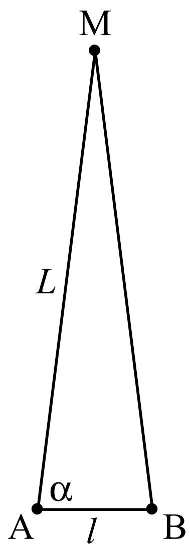
Hinweis: Verwenden Sie die Näherungen $\cos x \approx 1$ und $\sin x \approx x$ für kleine Winkel x und vernachlässigen Sie Terme der Größenordnung ε^2.

c) Rechnen Sie a), b) numerisch durch für $l = \overline{AB} = 100\,\text{km}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ $(1\,\%)$, 10^{-3} $(0.1\,\%)$, und unter der Annahme $\alpha = 89°$.

---

a) Aus $\overline{AB}/2 = \overline{AM}\cos\alpha$ folgt

$$L \;=\; \overline{AM} \;=\; \frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos\alpha} \;=\; \frac{l}{2}\,\sec\alpha$$



b) Mit

$$\begin{aligned}\cos\tilde{\alpha} &= \cos(\alpha + \varepsilon\,\alpha)\\ &= \cos\alpha\,\cos(\varepsilon\,\alpha) \;-\; \sin\alpha\,\sin(\varepsilon\,\alpha)\end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= \frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos\tilde{\alpha}}\\ &= \frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos\alpha\,\cos(\varepsilon\alpha) \;-\; \sin\alpha\,\sin(\varepsilon\alpha)}\\ &\approx \frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos\alpha - \varepsilon\,\alpha\sin\alpha} \;=\; \frac{l}{2}\,\frac{\cos\alpha + \varepsilon\,\alpha\,\sin\alpha}{\cos^2\alpha - \varepsilon^2\,\alpha^2\,\sin^2\alpha}\\ &\approx \frac{l}{2}\,\frac{\cos\alpha + \varepsilon\,\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \;=\; \frac{l}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \varepsilon\,\frac{\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\\ &= \underbrace{\frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos\alpha}}_{=L}\,\big(1 + \underbrace{\varepsilon\,\alpha\tan\alpha}_{=:\,\delta}\big) \;=\; L\,(1+\delta) \;=\; \tilde{L}\,.\end{aligned}$$

$\longrightarrow$

c) Für $l = 100\,\text{km}:\ L = \overline{AM} \approx \underline{2865\,\text{km}}$

Relativer Fehlereffekt für $\alpha = 89^\circ$:

- $\varepsilon = 10^{-2}$: Approximation und 'wahrer' Wert für δ :

  $\delta \approx 0.9 \quad (90\,\%) \quad \text{bzw.} \quad \delta_{exakt} = 8.1\ldots \quad (810\,\%)$

  Fehlerschätzung über obige Approximation hier zu optimistisch. (Für $\varepsilon = 10^{-2}$ haben wir zu grob geschätzt.)

  Für $\varepsilon = 10^{-2}$ ist

  $$\tilde{L} \;\approx\; \underline{26044\,\text{km}} \quad - \quad \text{falsche Größenordnung.}$$

- $\varepsilon = 10^{-3}$: Approximation und 'wahrer' Wert für δ :

  $\delta \approx 0.09 \quad (9\,\%) \quad \text{bzw.} \quad \delta_{exakt} = 0.097\ldots \quad (9.7\,\%)$

  Approximative Fehlerschätzung hier ziemlich gut.

  Für $\varepsilon = 10^{-3}$ ist

  $$\tilde{L} \;\approx\; \underline{3145\,\text{km}} \quad - \quad \text{wenigstens Größenordnung O.K.}$$

  (Abweichung knapp unter 10 %).

- Man sieht: Für $\alpha = 89^\circ$ und kleines ε ist der relative Fehlereffekt δ um etwa zwei Größenordnungen höher als der relative Messfehler ε. Der Verstärkungsfaktor ist etwa

  $$\alpha \tan \alpha \;\approx\; 89$$

  (Wert 89 'sieht aus wie' α in Grad – ein numerischer Zufall.) Für $\alpha \to 90^\circ$ geht der Verstärkungsfaktor gegen ∞.

$\square$