Zeigen Sie

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(e^x \sin x\big) \;=\; (\sqrt{2})^n\, e^x \sin\big(x + \frac{n\,\pi}{4}\big) \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Beweis mittels vollständiger Induktion.

- *Induktionsanfang:*

$$\frac{d^0}{dx^0}\big(e^x \sin x\big) \;=\; e^x \sin x \;=\; (\sqrt{2})^0\, e^x \sin\big(x + \frac{0\cdot\pi}{4}\big) \qquad \checkmark$$

- *Induktionsvoraussetzung:*

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(e^x \sin x\big) \;=\; (\sqrt{2})^n\, e^x \sin\big(x + \frac{n\,\pi}{4}\big) \quad \text{gelte für ein} \;\; n \in \mathbb{N}\,.$$

- *Induktionsschluss* $n \;\mapsto\; n+1:$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\big(e^x \sin x\big) \;=\; \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^n}{dx^n}\big(e^x \sin x\big)\Big) \;\overset{\text{ind}}{=}\; \frac{d}{dx}\Big((\sqrt{2})^n\, e^x \sin\big(x + \frac{n\,\pi}{4}\big)\Big)$$

$$= \;\sqrt{2}^{\,n}\Big(e^x \sin\big(x + \frac{n\,\pi}{4}\big) + e^x \cos\big(x + \frac{n\,\pi}{4}\big)\Big)$$

Mit $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und dem Additionstheorem für $\sin$ gilt

$$\begin{aligned} \sin y + \cos y \;&=\; \sqrt{2}\,\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\cos y\Big) \\ &=\; \sqrt{2}\,\Big(\cos\big(\frac{\pi}{4}\big)\sin y + \sin\big(\frac{\pi}{4}\big)\cos y\Big) \\ &=\; \sqrt{2}\;\sin\big(y + \frac{\pi}{4}\big) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\big(e^x \sin x\big) \;&=\; (\sqrt{2})^n\, e^x\Big(\sqrt{2}\,\sin\big(x + \frac{n\,\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\big)\Big) \\ &=\; (\sqrt{2})^{n+1}\, e^x \sin\big(x + \frac{(n+1)\,\pi}{4}\big) \qquad \checkmark \end{aligned}$$

$\square$

a) Leiten Sie die Formel die Ableitung des Sinus her, $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, und zwar mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion, indem Sie von der Formel für die Ableitung von arcsin ausgehen.

b) Berechnen Sie jeweils die Gleichung der Tangente an die Kurve $(x, f(x))$ (Graph der Funktion f) an der Stelle $(x_0, f(x_0))$:

(i) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\,,\quad x_0 = -\frac{1}{2}\,;$ (ii) $f(x) = x\,\ln x\,,\quad x_0 = e$

c) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$ jene Intervalle, auf denen sie monoton ist, und geben sie ein möglichst großes Intervall an, auf dem f Lipschitz-stetig ist. Wie lautet die zugehörige optimale (kleinstmögliche) Lipschitzkonstante?

---

a) Um die Ableitung mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion zu berechnen, ist die Funktion $\sin x$ auf einen Bereich eingeschränkt werden, auf dem sie bijektiv ist, etwa auf das Standardintervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\sin x$ ist dann die Umkehrfunktion von

$$f(y) = \arcsin y\,, \quad y \in [-1,1]$$

mit

$$f'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{\big(f'(f^{-1}(x))\big)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}} = \sqrt{\cos^2 x} = \cos x \qquad \big(x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\big) \qquad \checkmark$$

Für $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ argumentiert man mit der Periodizität von sin.

$\longrightarrow$

b) (i) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\,,\ x_0 = -\frac{1}{2}:$

Mit $f(x_0) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, und

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad f'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

folgt

$$T(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

(ii) $f(x) = x\,\ln x\,, \quad x_0 = e:$

Mit $f(x_0) = f(e) = e$, und

$$f'(x) = \ln x + x\,\frac{1}{x} = 1 + \ln x\,, \quad f'(x_0) = 2$$

folgt

$$T(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = e + 2\,(x-e)$$

c) $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$, mit $f'(x) = \frac{1}{2} - \sin(x) \quad \Rightarrow$

- f (streng) monoton $\downarrow$ für $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

  $\Rightarrow \quad f$ monoton $\downarrow$ auf $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}] \subseteq [0, 2\pi]$. (Beachte: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$)

  Periodizität von sin $\quad \Rightarrow \quad f$ monoton $\downarrow$ auf

  $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\,\pi, \frac{5\,\pi}{6} + 2k\,\pi\right]$$

- Analog: f (streng) monoton $\uparrow$ auf $[0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, 2\,\pi] \subseteq [0, 2\pi]$, und auf

  $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{5\,\pi}{6} + 2k\,\pi, \frac{13\,\pi}{6} + 2k\,\pi\right]$$

- Aus $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = \frac{3}{2}$ folgt

  $$L_{opt} = \frac{3}{2} \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

$\square$

Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ folgender Funktionen:

a) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2, \quad x \neq 0$

b) $f(x) = \cos(x^2)\cos^2 x\,, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x}\right), \quad x \neq 0$

d) $\dfrac{1}{\big(g(x^k)\big)^n}\,, \quad k, n \in \mathbb{N}$

(In d) ist g irgendeine gegebene differenzierbare Funktion.)

---

a)

$$\frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 2x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)$$

b)

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x^2)\cos^2 x\right) = \frac{d}{dx}\left(\cos(x^2)\right)\cos^2 x + \cos(x^2)\frac{d}{dx}\left(\cos^2 x\right)$$

$$= -\sin(x^2)\,2x\cos^2 x + \cos(x^2)\,2\cos x\,(-\sin x)$$

$$= -2x\,\sin(x^2)\cos^2 x - 2\cos(x^2)\sin x\cos x$$

c)

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)\right) = \frac{e^x}{e^x - 1}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right) = \frac{e^x}{e^x - 1}\,\frac{\cancel{e^x}\,e^x - \cancel{e^x}\,(e^x - 1)}{\cancel{e^x}\,e^x}$$

$$= \frac{e^x - e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x - 1}$$

d)

$$\frac{d}{dx}\,\frac{1}{\big(g(x^k)\big)^n} = \frac{d}{dx}\big(g(x^k)\big)^{-n} = -n\big(g(x^k)\big)^{-n-1}\,g'(x^k)\,k\,x^{k-1}$$

$\square$

Zeigen Sie, dass die beiden Ungleichungen

$$\frac{\pi}{4} \;\le\; \arctan(x) + \frac{1-x}{1+x^2} \;\le\; \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \ge 0$ gelten.

- Ableitung von $f(x) = \arctan(x) + \dfrac{1-x}{1+x^2}$:

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2} + \frac{-(1+x^2)-(1-x)\,2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \cancel{\frac{1}{1+x^2}} - \cancel{\frac{1}{1+x^2}} + \frac{2x\,(x-1)}{(1+x^2)^2} \;=\; \frac{2x(x-1)}{(1+x^2)^2}$$

$\Rightarrow \quad f$ ist

— monoton $\downarrow$ für $0 \le x < 1$,

— monoton $\uparrow$ für $x > 1$

- Daher: f nimmt Minimum an $x = 1$ an, mit $f(1) = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

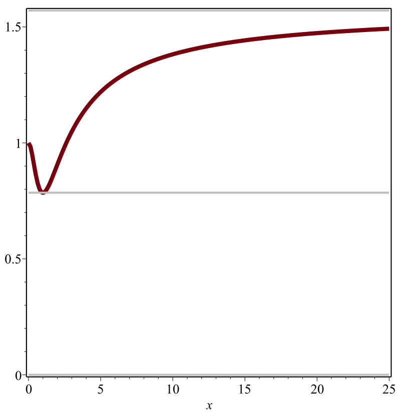
Weiters:

$$f(x) \;\le\; \max\{f(0), \lim_{x\to\infty} f(x)\},$$

mit

$$f(0) \;=\; \arctan(0) + 1 \;=\; 1\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; \frac{\pi}{2} + 0 \;=\; \frac{\pi}{2}\,.$$



- Folgerung: Für alle $x \ge 0$ gilt

$$f(x) \;\ge\; f(1) = \frac{\pi}{4}\,, \qquad f(x) \;\le\; \text{‘}f(\infty)\text{'} \;=\; \frac{\pi}{2}\,. \quad \checkmark$$

Genauer: $f(x) < \frac{\pi}{2}$, da f <u>streng</u> monoton $\uparrow$ für $x > 1$.

$\square$

Berechnen Sie die Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \cot x \arcsin x$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{e^x-1} - \dfrac{1}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{a^x - a^a}\,, \quad a\in\mathbb{R}^+,\ a\neq 1$

---

a) de l'Hospital $\leadsto$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\ln x}\,\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

b) de l'Hospital $\leadsto$

$$\lim_{x\to 0} \cot x \arcsin x = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \arcsin x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x \arcsin x + \cos x \,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = \frac{0+1}{1} = 1$$

c) Auf gleichen Nenner bringen, zweimal de l'Hospital $\leadsto$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{x\,(e^x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{(e^x-1) + x\,e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x + (e^x + x\,e^x)} = -\frac{1}{2}$$

d) Beachte $(x^a)' = a\,x^{a-1}$ und $(a^x)' = a^x \ln a\,.$

de l'Hospital $\leadsto$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a} = \lim_{x\to a} \frac{a\,x^{a-1} - a^x \ln a}{a^x \ln a} = \frac{a^a - a^a \ln a}{a^a \ln a} = \frac{1-\ln a}{\ln a}$$

$\square$

Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

- Mit

$$\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)$$

und aufgrund der Stetigkeit von $\exp$ gilt

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)$$

wobei [de l'Hospital zweimal anwenden:]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2\cos x - 2x\sin x} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

- Daher: f stetig an $x = 0$ für $c = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

$\square$

Der Widerstand R eines Schwingkreises mit der Kapazität $C = 20$ und Induktivität $L = 5$ ist zu bestimmen. Dazu wird die Kreisfrequenz ω gemessen. Der gemessene Wert sei $\omega = 7$, mit einer Genauigkeit von $\pm 1\%$.

Was ist der Wert von $R = \dfrac{1}{\omega\, C - 1/(\omega L)}$, und welchen relativen Fehler (in %) erwarten Sie bei der Auswertung von R aufgrund der Unsicherheit in der Messung von ω?

C und L sind als exakt angenommen.

$\leadsto$ Betrachte Widerstand $R = R(\omega)$ als Funktion der (fehlerbehafteten) Kreisfrequenz ω:

$$R(\omega) = \frac{1}{\omega\, C - \frac{1}{\omega L}}$$

mit

$$\begin{aligned} R'(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left(\omega\, C - \frac{\omega^{-1}}{L} \right)^{-1} \\ &= \left(\omega\, C - \frac{\omega^{-1}}{L} \right)^{-2} \left(C + \frac{\omega^{-2}}{L} \right) = \frac{C + \dfrac{1}{\omega^2 L}}{\left(\omega\, C - \dfrac{1}{\omega L} \right)^2} \end{aligned}$$

In erster Näherung gilt an der gemessenen Stelle ω:

$$\Delta R = R(\omega + \Delta\omega) - R(\omega) \approx R'(\omega)\, \Delta\omega\,,$$

also

$$\Delta R \approx R'(\omega)\, \Delta\omega\,, \quad \text{und} \quad \frac{\Delta R}{R} \approx \frac{\omega R'}{R}\, \frac{\Delta\omega}{\omega}$$

mit dem

$$\textit{relativen Verstärkungsfaktor}\ \frac{\omega R'}{R}$$

- Zahlenwerte für $C = 20,\ L = 5,\ \omega = 7 \pm 1\%,$ d.h. $\left| \dfrac{\Delta\omega}{\omega} \right| \approx 0.01$:

$$R(7) \approx 0.714\,\text{e-2}\,, \qquad R'(7) \approx -0.102\,\text{e-2}$$

$\leadsto$

$$\left| \frac{\Delta R}{R} \right| \approx \frac{7 \cdot 0.00102}{0.00714} \left| \frac{\Delta\omega}{\omega} \right| \approx 1.00 \cdot 0.01 = 0.01 \sim 1\,\%\,.$$

Der relative Fehlereffekt ist hier 'neutral', d.h., genau in der Größe der Störung.

$\square$

Bestimmen Sie k derart, dass

a) $\sqrt{2\,x^2-1} \;=\; k\,x + O(1)\,, \quad x \to \infty$

b) $\left(1+x^2\right)^{-1/2} \;=\; 1 + k\,x^2 + O(x^4)\,, \quad x \to 0$

---

a) $$\sqrt{2\,x^2-1} \;=\; x\sqrt{2-\tfrac{1}{x^2}}$$

Mit $u = \frac{1}{x^2}$ ergibt Linearisierung von $\sqrt{2-u}$ an der Stelle $u=0$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2-\tfrac{1}{x^2}} \;=\; \sqrt{2-u} \;&=\; \sqrt{2} + \frac{d}{du}\sqrt{2-u}\,\Big|_{u=0}\cdot(u-0) + o(|u|)\\ &=\; \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2-u}}\Big|_{u=0}\cdot u + o(|u|)\\ &=\; \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\,u + o(|u|) \quad \text{für} \quad u \to 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sqrt{2\,x^2-1} \;&=\; x\sqrt{2-\tfrac{1}{x^2}} \;=\; x\left(\sqrt{2}\,(1-\tfrac{1}{4\,x^2}) + o(|\tfrac{1}{x^2}|)\right)\\ &=\; \sqrt{2}\,x - \frac{\sqrt{2}}{4\,x} + o(|\tfrac{1}{x}|) \quad \text{für} \quad x \to \infty\,.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $k = \sqrt{2}\,,$ und wir haben sogar gezeigt

$$\sqrt{2\,x^2-1} \;=\; \sqrt{2}\,x + O(|\tfrac{1}{x}|) \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

d.h., $\sqrt{2}\,x$ ist Asymptote für $\sqrt{2\,x^2-1}$.

(Man zeigt auch leicht direkt: $\sqrt{2\,x^2-1} - \sqrt{2}\,x \;\to\; 0$ für $x \to \infty$.)

- Anmerkung zu a): Wir haben gezeigt (für $x \to \infty$)

$$\sqrt{2\,x^2-1} \;=\; k\,x + O(1) \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{2}$$

Frage: Ist dieses k (charakterisiert die Asymptote) eindeutig?

Antwort; *Ja*, weil für $k \neq \sqrt{2}$ gilt $\sqrt{2\,x^2-1} - k\,x \to \infty\,.$

$\longrightarrow$

b) $\left(1+x^2\right)^{-1/2}, \quad x \to 0$

Setze $v = x^2$; suche k so dass

$$(1+v)^{-1/2} = 1 + k\,v + O(v^2) \quad \text{für} \quad v \to 0$$

Linearisierung von $(1+v)^{-1/2}$ an der Stelle $v = 0$ ergibt

$$\begin{aligned}(1+v)^{-1/2} &= 1 + \frac{d}{dv}\left(1+v\right)^{-1/2}\Big|_{v=0} \cdot (v-0) + O(v^2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\,(1+v)^{-3/2}\Big|_{v=0} \cdot v + O(v^2) \\ &= 1 - \frac{v}{2} + O(v^2) \quad \text{für} \quad v \to 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ mit $k = -\frac{1}{2}$:

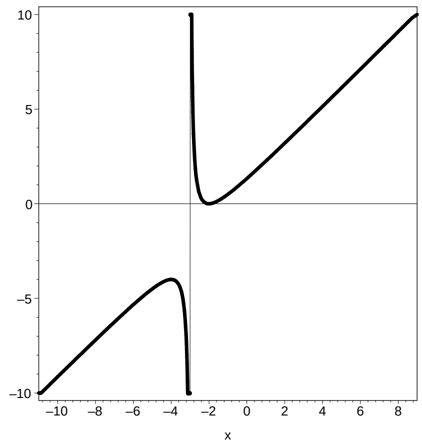
$$\left(1+x^2\right)^{-1/2} = 1 + k\,x^2 + O(x^4) \quad \text{für} \quad x \to 0\,.$$

□

Ermitteln Sie für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3}$$

den maximalen Definitionsbereich und bestimmen Sie die Art der Unstetigkeitsstellen. Finden Sie die Nullstellen und untersuchen Sie den Charakter der Extrema. Untersuchen Sie weiters das Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Stellen Sie die Geradengleichung der Asymptoten auf und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.



$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x^2 + 4x + 4)\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x-1)}} = \frac{(x+2)^2}{x+3}$$

- $x = -3$: Pol 1. Ordnung; f definiert auf $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
- $x = -2$: doppelte Nullstelle, mit $f'(-2) = 0$
- Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x+3)^3}$$

- Lokale Extremalstellen:

  $x = -2$: lokales Minimum; $x = -4$: lokales Maximum
- keine Wendepunkte
- Asymptotisches Verhalten für $x \to \pm\infty$:

  Sieht man am besten mittels Polynomdivision und Partialbruchzerlegung,

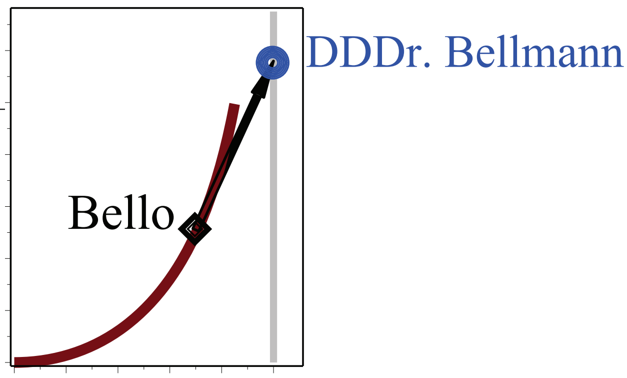
$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+3} = x + 1 + O(|\tfrac{1}{x}|) \text{ für } x \to \pm\infty$$

$\Rightarrow$ $x + 1$ ist Asymptote für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$. □

(*) Herr DDDr. Bellmann steht an der Stelle $(0,0)$ in der xy - Ebene, sein Hund Bello wartet links neben ihm irgendwo auf der x - Achse. DDDr. Bellmann geht mit konstanter Geschwindigkeit v_B in y - Richtung los und spaziert die positive y - Achse entlang. Bello läuft mit konstanter Geschwindigkeit v_b hinterher, und zwar so, dass der Hundegeschwindigkeitsvektor zu jedem Zeitpunkt genau dorthin zeigt, wo sich DDDr. Bellmann gerade befindet.

Zeigen Sie, dass Bellos Bahnkurve $y = b(x)$ in der xy - Ebene der folgenden nichtlinearen Differentialgleichung genügt:

$$\frac{v_b}{v_B}\, x\, b''(x) + \sqrt{1 + (b'(x))^2} = 0$$



- Vorbemerkung:
  $x = x(t)$ bezeichnet die waagrechte Bahnkoordinate von Bello.

- Wir betrachten die beiden Positionen in der xy - Ebene:

  $$(x, b(x)) \;\ldots\; \text{Bello } (b)), \qquad (0, B) \;\ldots\; (\text{DDDr. Bellmann } (B))$$

  Laut Angabe gilt zu jedem Zeitpunkt ('treuer Hund'):

  $$b'(x) \;=\; \frac{B - b(x)}{0 - x} \qquad \Rightarrow \qquad x\, b'(x) \;=\; b(x) - B \qquad\qquad (*)$$

- $x = x(t)$ und $B = B(t)$ sind Funktionen der Zeit t, und $B(t)$ ist bekannt:

  $$(x(t), b(x(t))) \;=\; ?? \qquad (0, B(t)) \;=\; (0, v_B\, t)$$

- Zusammen mit (*) folgt für $x = x(t)$ zu jedem Zeitpunkt t:

  $$\frac{d}{dt}\big(x(t)\, b'(x(t))\big) \;=\; \frac{d}{dt}\big(b(x(t)) - v_B\, t\big)$$

  $\Rightarrow$ (mittels Kettenregel, Produktregel):

  $$\cancel{\dot{x}(t)\, b'(x(t))} + x(t)\, b''(x(t))\, \dot{x}(t) \;=\; \cancel{b'(x(t))\, \dot{x}(t)} - v_B \qquad\qquad (**)$$

- Die Information über die (konstante) Geschwindigkeit v_b von Bello wurde noch nicht verwendet. Der HGV (Hundegeschwindigkeitsvektor) ist gegeben durch

  $$\left(\tfrac{d}{dt}\, x(t),\ \tfrac{d}{dt}\big(b(x(t))\big)\right) \;=\; \big(\dot{x}(t),\ b'(x(t))\, \dot{x}(t)\big) \qquad (\text{Kettenregel})$$

  wobei laut Angabe:

  $$\sqrt{\big(\dot{x}(t)\big)^2 + \big(b'(x(t))\, \dot{x}(t)\big)^2} \;\equiv\; v_b \quad (\text{Hundegeschwindigkeit} = v_b)$$

$\longrightarrow$

$\Rightarrow$

$$\dot{x}(t) = \frac{v_b}{\sqrt{1 + b'(x(t))^2}}$$

- Einsetzen in (**) [mit $x = x(t)$, $\dot{x} = \dot{x}(t)$],

$$x\, b''(x)\, \dot{x} = -\, v_B$$

ergibt

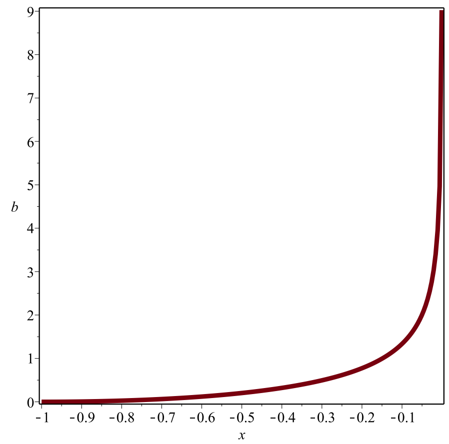
$$x\, b''(x)\, \frac{v_b}{\sqrt{1 + b'(x)^2}} + v_B = 0 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{v_B} \sqrt{1 + b'(x)^2}$$

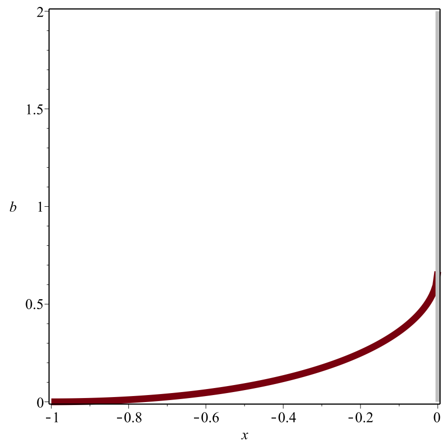
also

$$\frac{v_b}{v_B}\, x\, b''(x) + \sqrt{1 + (b'(x))^2} = 0 \qquad \checkmark$$

Anmerkung: Es wurde a priori angenommen, dass Bellos Bahnkurve in der Form $(x, b(x))$ darstellbar ist, d.h., als Graph einer Funktion $b(x)$. Dies gilt, weil laut Annahme Bello immer mit positiver Geschwindigkeit nach rechts läuft, d.h. zu jeder Hundeabszisse x gibt es genau eine Hundeordinate $y = b(x)$.

- Zwei mögliche Lösungen $b(x)$ der Differentialgleichung, numerisch ermittelt:
  - links: $v_b < v_B$; Bello ist zu langsam und kommt nicht nach.
  - rechts: $v_b > v_B$; Bello holt DDDr. Bellmann ein.





$\square$