a) Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{p\,x}}{1-e^{q\,x}} \quad (p,q \in \mathbb{N})$$

auf zwei Arten: einmal mit Hilfe geometrischer Summen und einmal mit Hilfe der Differentialrechnung.

b) Bestimmen Sie den gleichen Limes für beliebiges $p, q \in \mathbb{R}$ $(q \neq 0)$.

---

a) Mit

$$\frac{1-e^{p\,x}}{1-e^{q\,x}} = \frac{1-(e^{x})^{p}}{1-(e^{x})^{q}}$$

ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{p\,x}}{1-e^{q\,x}} &= \lim_{y\to 1} \frac{1-y^{p}}{1-y^{q}} \\
&= \lim_{y\to 1} \frac{1-y^{p}}{1-y} \Big/ \lim_{y\to 1} \frac{1-y^{q}}{1-y} \\
&= \lim_{y\to 1} \Big(\sum_{k=0}^{p-1} y^{k}\Big) \Big/ \lim_{y\to 1} \Big(\sum_{k=0}^{q-1} y^{k}\Big) = \frac{p}{q}
\end{aligned}$$

Alternative: mit Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{p\,x}}{1-e^{q\,x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-p\,e^{p\,x}}{-q\,e^{q\,x}} = \frac{p}{q}$$

bzw.

$$\lim_{y\to 1} \frac{1-y^{p}}{1-y^{q}} = \lim_{y\to 1} \frac{-p\,y^{p-1}}{-q\,y^{q-1}} = \frac{p}{q}$$

b) mit Regel von de l'Hospital wie unter a). Gleiches Resultat.

$\square$

Die *Bernstein-Polynome* $B_{k,n}(x)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ sind definiert als

$$B_{k,n}(x) \;:=\; \binom{n}{k}\, x^k\, (1-x)^{n-k}\,, \quad k = 0 \ldots n\,.$$

a) Zeigen Sie, ohne die Ableitung $B'_{n,k}(x)$ zu berechnen: Für $0 < k < n$ gibt es eine Stelle $\xi \in (0,1)$ mit $B'_{n,k}(\xi) = 0$.

b) Zeigen Sie, indem Sie Ableitung $B'_{n,k}(x)$ berechnen: Für $0 < k < n$ gibt es *genau eine* Stelle $\xi \in (0,1)$ mit $B'_{n,k}(\xi) = 0$. Wo befindet sich diese Stelle? Welcher Typ von Punkt liegt hier vor?

c) Wie ist das Verhalten für $k = 0$ und $k = n$?

Betrachte $f(x) \;=\; x^k\,(1-x)^{n-k} \geq 0$ auf $[0,1]$

a) Für $0 < k < n$: $f(0) = f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\,\xi \in (0,1)$ mit $f'(\xi) = 0$ (MWS)

b) Ableitung von f:

$$\begin{aligned} f'(x) \;&=\; k\,x^{k-1}\,(1-x)^{n-k} - x^k\,(n-k)\,(1-x)^{n-k-1} \\ &=\; \big(k\,(1-x) - x\,(n-k)\big)\,x^{k-1}\,(1-x)^{n-k-1} \\ &=\; \big(k - n\,x\big)\,x^{k-1}\,(1-x)^{n-1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ eindeutige Maximalstelle an $x = \dfrac{k}{n} \in (0,1)$

c)
- $k = 0$: $f(x) = (1-x)^n \downarrow$ mit $f(0) = 1,\ f(1) = 0\,.$
  Für $n \geq 2$ ist $f'(1) = 0\,.$
- $k = n$: $f(x) = x^n \uparrow$ mit $f(0) = 0,\ f(1) = 1\,.$
  Für $n \geq 2$ ist $f'(0) = 0\,.$

$\square$

(*) Beweisen Sie die Ungleichung

$$a\,b \;\le\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \ldots\ \textbf{‘Young’sche Ungleichung’}$$

für alle $a, b \ge 0$, wobei $p > 1$ und q der zu p ‘konjugierte’ Exponent, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Hinweis: Halten Sie $b \ge 0$ beliebig fest und analysieren Sie die Funktion $f(a) := \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - a\,b$. Sehen Sie sich die Nullstelle von f' an.

- $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q \;=\; 1 + \frac{1}{p-1} \;=\; \frac{p}{p-1}$$
- $$f(a) \;=\; f(a;b) \;=\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - a\,b$$
- Es gilt
  $$f(0) = \frac{b^q}{q} \ge 0\,, \quad \text{und} \quad \lim_{a\to\infty} f(a) = \infty$$
- Ableitung von f:
  $$f'(a) = a^{p-1} - b$$
- Nullstelle von f':
  $$f'(a) \;=\; a^{p-1} - b \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \;=\; b^{\,1/p-1}\,, \quad \text{mit}$$
  $$f(b^{\,1/p-1}) \;=\; \frac{(b^{\,1/p-1})^p}{p} + \frac{b^q}{q} - (b^{\,1/p-1})\,b^1 \;=\; \frac{b^{\,p/p-1}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\,1+1/p-1}$$
  $$= \frac{b^q}{p} + \frac{b^q}{q} - b^q \;=\; \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\Big)\,b^q \;=\; 0$$
- Folgerung: f nimmt sein globales Minimum 0 an $b^{\,1/p-1}$ an. q.e.d. ✓

□

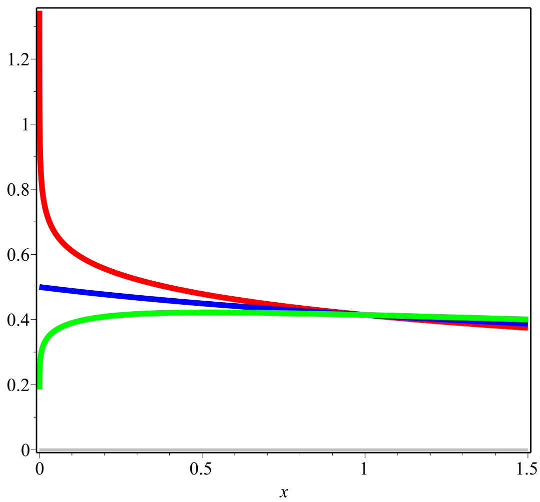
(**) [vgl UE 3:] Führen Sie für die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^p} - 1}{x}, \quad p > 0,$$

eine Kurvendiskussion in Abhängigkeit des Parameters p durch.

Berechnen Sie auch zunächst nochmals $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ mittels einer anderen Methode als in UE 3. Untersuchen Sie auch die Asymptotik für $x \to \infty$.

- Grafik: $p = 0.9 \;/\; 1.0 \;/\; 1.1$



- Vgl. UE 3:

$$f(x) = \ldots = \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1+x^p} + 1}$$

$\Rightarrow$ für $x \to 0+$:

$$f(x) \to \begin{cases} \infty, & 0 < p < 1 \\ \frac{1}{2}, & p = 1 \\ 0, & p > 1 \end{cases}$$

Diesen Limes erhält man auch mittels de l'Hospital:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{(1+x^p)^{1/2} - 1}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0+} \frac{p\, x^{p-1}}{\sqrt{1+x^p}} \qquad \checkmark$$

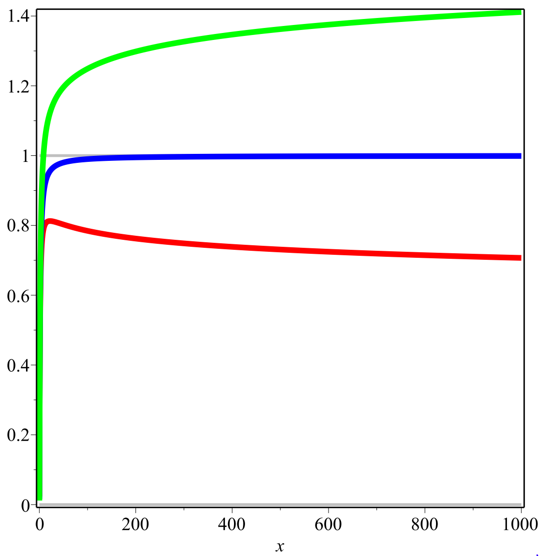
- $f(x) > 0 \;\; \forall\, x > 0$; keine Nullstellen

  Aber: $f(0) = \frac{1}{2}$ für $p > 1$ (hebbare Unstetigkeit)

- Asymptotik für $x \to \infty$:

$$f(x) \sim x^{\frac{p}{2}-1} \to \begin{cases} 0, & 0 < p < 2 \\ 1, & p = 2 \\ \infty, & p > 2 \end{cases}$$

Grafik: $p = 1.9 \;/\; 2.0 \;/\; 2.1$



$\longrightarrow$

- Ableitung von f :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\,p\,x^{p-1}\,(1+x^p)^{-1/2}\,x - (1+x^p)^{1/2}}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x^2}\Big(\tfrac{p}{2}\,x^p\,(1+x^p)^{-1/2} - (1+x^p)^{1/2} + 1\Big)$$

$p = 1$: zweimal de l'Hospital . . . ☹

$$f'(x)\ \ldots\ \to -\frac{1}{8} \quad \text{für} \quad x \to 0+$$

- Nullstellen der Ableitung: Substituiere $x^p = u$ $\rightsquigarrow$

$$\tfrac{p}{2}\,u\,/\,\sqrt{1+u} - \sqrt{1+u} + 1 = 0 \qquad [\,\cdot\sqrt{1+u}\,]$$
$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{p}{2}\,u - (1+u) + \sqrt{1+u} = 0$$

Substituiere $\sqrt{1+u} = v$ $\rightsquigarrow$

$$\tfrac{p}{2}\,(v^2-1) - v^2 + v = 0$$

. . . quadratische Gleichung für v $\rightsquigarrow$ eine relevante Lösung für $p \neq 2$:

$$v = \frac{p}{2-p} \quad\Rightarrow\quad u = v^2 - 1 = \frac{4\,(p-1)}{(p-2)^2} \quad\Rightarrow\quad x = u^{1/p} = \left(\frac{4\,(p-1)}{(p-2)^2}\right)^{1/p}$$

v nur positiv für $p < 2$, u nur positiv für $p > 1$.

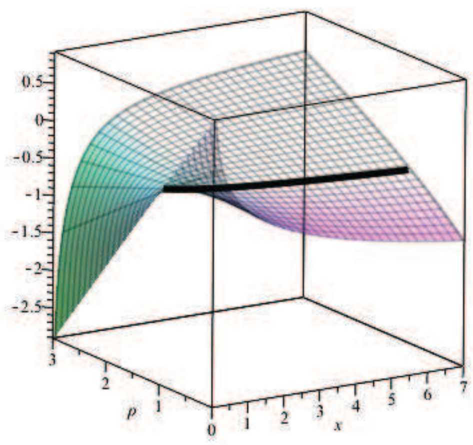
$\Rightarrow$ Eindeutige positive Nullstelle von f' existiert für $p \in (1,2)$.

Aufgrund des Verhaltens von f für $x \to 0$ und $x \to \infty$ ist dieses eine globale Maximalstelle.

- $f(x)$ kann man auch als Funktion der beiden Variablen x und p betrachten: $f = f(x,p)$. Diese ist aufgrund der starken Variation schwer zu visualisieren.

Abbildung: Verlauf von $\log_{10} f(x,p)$.

Schwarze Trajektorie: $p = 1$ (beschränkt).

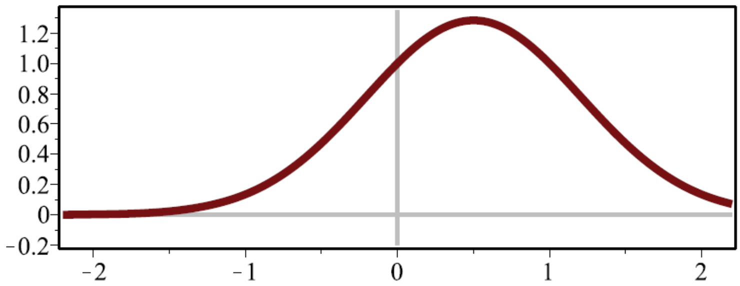


□

Gegeben Sei die Funktion $f(x) = e^x / e^{(x^2)}$.

a) Führen Sie für f eine komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

b) Zeigen Sie: $g(x) := f(x + \frac{1}{2})$ ist eine gerade Funktion.



a) $f(x) \;=\; e^{x-x^2}$ definiert auf ganz $\mathbb{R}$: $D(f) \;=\; \mathbb{R}$

- $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Keine Nullstelle.
- $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$, weil $x - x^2 \to -\infty$.
- f ist auf ganz $\mathbb{R}$ (beliebig oft) differenzierbar. Ableitungen von f:

$$f'(x) \;=\; (1 - 2\,x)\, e^{x-x^2} \;=\; (1 - 2\,x)\, f(x)$$
$$f''(x) \;=\; (-1 - 4\,x + 4\,x^2)\, e^{x-x^2} \;=\; (-1 - 4\,x + 4\,x^2)\, f(x)$$

- Nullstelle von f': $x = \frac{1}{2}$, mit $f''(\frac{1}{2}) = -2\, e^{1/4} < 0$

  $\Rightarrow \;\; x = \frac{1}{2}$ ist globales Maximum, mit $f(\frac{1}{2}) = e^{1/4}$

- Nullstellen von f'': $4\,x^2 - 4\,x - 1 = 0 \;\;\rightsquigarrow$

  zwei Wendepunkte an $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0\,, \quad x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0\,.$

  Beide sind einfache Nullstellen von f'' $\;\Rightarrow\;$ $f'''(\mathrm{WP}) \neq 0$ $\;\checkmark$

- f ist konkav / konvex / konkav.

b) Rechnen:

$$(x + \tfrac{1}{2}) - (x + \tfrac{1}{2})^2 \;=\; \ldots \;=\; \tfrac{1}{4} - x^2 \;\; \text{gerade}$$

$$\Rightarrow \;\; g(x) = f(x + \tfrac{1}{2}) \;=\; \exp\left((x + \tfrac{1}{2}) - (x + \tfrac{1}{2})^2\right) \;=\; \exp\left(\tfrac{1}{4} - x^2\right) \;\text{gerade}\,.$$

$\checkmark$

$\square$

Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $x > 0$ mit

$$\frac{(1+x)^n}{x} < n\,e\,.$$

Geben Sie einen derartigen (von n abhängigen) Wert für x an.

- Es gilt $f(x) = \dfrac{(1+x)^n}{x} > 0$ für alle $x > 0$, mit

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

- Suche Minimalstelle in $(0, \infty)$. Ableitung von f:

$$f'(x) = \frac{n(1+x)^{n-1}\,x - (1+x)^n}{x^2} = \frac{(1+x)^{n-1}\big(nx - (1+x)\big)}{x^2}$$

$$= \frac{(1+x)^{n-1}\big((n-1)\,x - 1\big)}{x^2}$$

$\rightsquigarrow$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{n-1} \quad \text{für } \; n \geq 2$$

mit

$$f\big(\tfrac{1}{n-1}\big) = \frac{\big(1 + \frac{1}{n-1}\big)^n}{\frac{1}{n-1}} = \big(1 + \tfrac{1}{n-1}\big)^{n-1}\big(1 + \tfrac{1}{n-1}\big)(n-1)$$

$$= \big(1 + \tfrac{1}{n-1}\big)^{n-1}(n - \cancel{1} + \cancel{1}) < n\,e\,.$$

- $x = \frac{1}{n-1}$ ist globale Minimalstelle von f.
- $n = 1$ ist Sonderfall. Keine Minimalstelle, aber $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.
  Wähle $x > 1/(e-1)$.

$\square$

Wir basteln eine Sprungschanze, indem wir das Profil des Anlaufs (von der Seite gesehen) als Polynom $p(x)$ vom Grad 5 modellieren. Start oben bei $(x_0, y_0) = (0, 30)$ (der Sprungturm ist 30 m hoch), Absprung bei $(x_1, y_1) = (60, 0)$ (Anlauf ist 60 m lang, waagrecht gemessen). Weiters soll gelten $p'(x_0) = -\frac{1}{2}$, $p'(x_1) = -1/10$ und $p''(x_1) = 0$. Weiters fordern wir $p(120) = -30$, so dass das Polynom $p(x)$ für $x > 60$ auch eine denkbare Flugbahn mit beschreibt.

Stellen Sie das Polynom $p(x)$ auf, das diesem Höhenprofil entspricht (ohne geeignete Softwareunterstützung ist dies jedoch sehr mühevoll, da ein Gleichungssystem in 6 Unbekannten zu lösen ist), und zeichnen Sie seinen Verlauf. Weist das Schanzenprofil einen Wendepunkt auf, und wo befindet er sich?

- Ansatz: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$, mit

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + 4\,a_4\,x^3 + 5\,a_5\,x^4 \\ p''(x) &= 2\,a_2 + 6\,a_3\,x + 12\,a_4\,x^2 + 20\,a_5\,x^3 \end{aligned}$$

- Erwünschte Eigenschaften $\leftrightsquigarrow$ 6 lineare Gleichungen für die a_i:

$$\begin{aligned} p(0) &= 30 \\ p(60) &= 0 \\ p'(0) &= -\tfrac{1}{2} \\ p'(60) &= -\tfrac{1}{10} \\ p''(60) &= 0 \\ p(120) &= -30 \end{aligned}$$

- eindeutige Lösung:

$$a_0 = 30\,,\quad a_1 = -\tfrac{1}{2}\,,\quad a_2 = -\tfrac{2}{75}\,,\quad a_3 = \tfrac{1}{1125}\,,\quad a_4 = -\tfrac{1}{108000}\,, a_5 = \tfrac{1}{32400000}$$

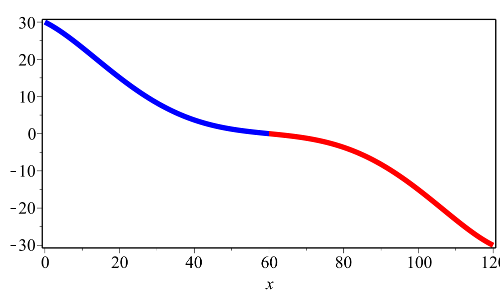
- Mit

$$p''(x) = -\tfrac{4}{75} + \tfrac{2}{375\,x} - \tfrac{1}{9000}\,x^2 + \tfrac{1}{1620000}\,x^3$$

liefert Polynomdivision $p''(x)/(x-60)$ eine quadratische Gleichung für weitere Wendepunkte. Lösung: WP bei

$$x = 60 \mp 12\sqrt{15} \approx$$

$$\approx \begin{cases} 13.52 & \text{(links / Anlauf)} \\ 106.5 & \text{(rechts)} \end{cases}$$



$\square$

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f'(a) < 0,\ f'(b) > 0$, und $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, d.h., f ist konvex.

a) Zeigen Sie: f hat genau eine Minimalstelle $x^* \in [a,b]$.

b) Schreiben Sie eine Newton-artige Iteration für die numerische Berechnung von x^* an, ausgehend von $x_0 \in (a,b)$. Ist diese sicher wohldefiniert?

c) Ein modifiziertes Verfahren zur Minimumsuche: Sei x_i eine Iterierte. Approximiere $f(x)$ lokal durch sein quadratisches Taylor-Polynom an der Stelle x_i und suche dessen eindeutige (?) Minimalstelle. Dies definiert die neue Iterierte x_{i+1}. Schreiben Sie diese Iteration an. Was erkennen Sie?

---

a) Zwischenwertsatz angewendet auf f' $\Rightarrow$

$$\exists\ x^* \in [a,b] \quad \text{mit} \quad f'(x^*) = 0$$

Dieses x^* ist *eindeutig* und *Minimalstelle* von f, da

- f' streng monoton $\uparrow$ wegen $f'' > 0$,
- $x = a$ und $x = b$ können keine Minimalstellen sein. ✓

b) Newton-Iteration für die Gleichung $f'(x) = 0$:

$$x_{i+1} := x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}\,, \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

wohldefiniert, *falls* die Iteration das Intervall $[a,b]$ nicht verlässt.

c) Taylor:

$$f(x_i + h) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}(x - x_i)^2 =: p_i(x)\,,$$

mit (*sofern* $x_i \in (a,b)$)

$$p_i''(x) \equiv f''(x_i) > 0$$

$p_i(x)$ ist konvexes Polynom vom Grad 2, mit eindeutiger globaler Minimalstelle x_i^*: Die Gleichung

$$p_i'(x) = f'(x_i) + f''(x_i)(x - x_i) = 0$$

ist eindeutig auflösbar nach x, mit Lösung (Minimalstelle von p_i)

$$x_i^* = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} = x_{i+1} \qquad (\text{Newton-Schritt wie oben!})$$

Das Verfahren c) ist äquivalent zum Newton-Verfahren b) für $f' = 0$. $\longrightarrow$

Anmerkung: Für die praktische Umsetzung am Rechner modifiziert man die Iteration: Setze

$$x_{i+1} \;:=\; x_i - \lambda_i \, \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} \,, \qquad \lambda_i \in (0,1]$$

und *teste*, ob $f(x_{i+1}) < f(x_i)$ ('Abstieg' – am Rechner überprüfbar!).

- A priori - Überlegung: Für hinreichend kleines λ_i wird gelten (Taylor) :

$$f(x_{i+1}) \;\approx\; f(x_i) - \lambda_i \underbrace{\frac{(f'(x_i))^2}{f''(x_i)}}_{>0} + \mathit{Restglied} \;<\; f(x_i) + \mathit{Restglied}$$

- $\rightsquigarrow$ erwarte Abstieg für hinreichend kleines λ_i . (Im Restglied steckt λ_i^2.)

  Andererseits soll λ_i nicht zu klein gewählt werden, da die Iteration sonst sehr langsam konvergiert, d.h., sich zu vorsichtig 'nach unten tastet'.

  $\rightsquigarrow$ erfordert *Strategie* zur adaptiven Wahl der λ_i .

- Lokale quadratische Konvergenz in der Nähe von x^* nur für $\lambda_i = 1$!

$\square$

a) Spezifizieren Sie, wie man mit Hilfe des Newton-Verfahrens die folgenden Werte iterativ approximieren kann:

$$\text{(i)}\quad \sqrt[3]{x}\,, \qquad \text{(ii)}\quad \frac{1}{x} \qquad \text{für gegebenes } x > 0.$$

Fall (ii) ist eigentlich trivial (warum?). Falls wir jedoch annehmen, dass bei der Newton-Iteration keine Division beteiligt sein darf (sonst wäre das ja eigentlich sinnlos), man also nur mit Additionen/Subtraktionen und Multiplikationen auskommen will (z.B. weil Ihr Hund Bello die Divisionstaste Ihres Rechners gefressen hat), dann muss man es ein bisschen anders machen. Wie funktioniert das?

b) Berechnen Sie (i) $\sqrt[3]{2}$ und, unter Verwendung des so erhaltenen Wertes, (ii) $1/\sqrt[3]{2}$, wobei Sie Taschenrechnergenauigkeit anstreben. Beobachten Sie den Verlauf der Iteration und brechen Sie ab, wenn sich innerhalb dieser Genauigkeit nichts mehr ändert. Wählen Sie als Startwerte für die Newton-Iteration 1.5 (Fall (i)) bzw. 0.5 (Fall (ii)).

- Newton-Iteration für Gleichung $f(u) = 0$ ausgehend von Schätzwert u_0:

$$u_{i+1} \;:=\; u_i - \frac{f(u_i)}{f'(u_i)}\,, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

a) (i) Positive Lösung u der Gleichung $f(u) = u^3 - x = 0\,,$ mit $f'(u) = 3\,u^2$

Newton-Iteration:

$$u_{i+1} \;:=\; u_i - \frac{u_i^3 - x}{3\,u_i^2} \;=\; \frac{1}{3}\left(2\,u_i + \frac{x}{u_i^2}\right)$$

(ii) Lösung u der Gleichung $f(u) = \frac{1}{u} - x = 0\,,$ mit $f'(u) = -\frac{1}{u^2}$

Newton-Iteration:

$$u_{i+1} \;:=\; u_i - \frac{\frac{1}{u_i} - x}{-\frac{1}{u_i^2}} \;=\; u_i + u_i - x\,u_i^2 \;=\; u_i\,(2 - x\,u_i) \quad \text{divisionsfrei}$$

b) (i) $f(u) = u^3 - 2 = 0\,.$ Iteration quadratisch konvergent:

```
0   1. 500000000
1   1.2 96296296
2   1.2 60932225
3   1.259921 861
4   1.259921050
5   1.259921050
```

```
2^(1/3) = 1.259921050...
```

$\longrightarrow$

b) (ii) $f(u) = \dfrac{1}{u} - 1.259921050 = 0\,.$ Iteration quadratisch konvergent:

```
0   0. 5000000000
1   0. 6850197375
2   0.7 788189510
3   0.793 4215026
4   0.793700 4275
5   0.79370052 59
6   0.79370052 59

2^(-1/3) = 0.7937005260
```

Abbruchfehler aus Iteration (i) bewirkt Abweichung:

Eine leicht ‘gestörte’ Gleichung wurde gelöst – erkennbar am Konvergenzverhalten.

Anmerkung:

Man könnte natürlich $1/\sqrt[3]{2}$ direkt mittels Newton-Iteration berechnen:
Lösung der Gleichung $f(u) = u^3 - \frac{1}{2} = 0\,.$

$\square$

Betrachten Sie die Riemann-Summe

$$R_h(f) := h \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,, \quad \text{wobei} \quad h = \frac{1}{N}\,, \quad x_i = i\,h\,,$$

für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Laut Definition des Riemann-Integrals gilt $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} R_h(f)$. Falls das Integral formelmäßig nicht berechenbar ist, kann man $R_h(f)$ für $h > 0$ als numerische Approximation verwenden ('Rechteckregel').

Unter a) – c) betrachten wir zur Übung nur die einfache Funktion $f(x) = x^3$.

a) Berechnen Sie $I(f)$, indem Sie den Grenzwert $\lim_{h\to 0} R_h(f)$ bestimmen.

Hinweis/Anmerkung: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2$, wie man mittels vollständiger Induktion nachweist. Sie können dies auch als Teleskopsumme auffassen, indem Sie i^3 in der Form $\frac{1}{4}\big(i^2 (i+1)^2 - (i-1)^2 i^2\big)$ schreiben. Die Teleskopsumme ist das diskrete Analogon zu der Formel $I(f) = \int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\Big(\frac{x^4}{4}\Big)\,dx = \frac{1}{4}$.

b) Geben Sie für den Fehler $|R_h(f) - I(f)|$ eine Abschätzung in Abhängigkeit von h an. Wie schnell geht der Fehler gegen 0 für $h \to 0$?

c) Wie b), jedoch für die 'Trapezregel' [Skizze]

$$T_h(f) := h \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\,, \quad \text{mit} \quad h = \frac{1}{N}\,, \quad x_i = i\,h\,.$$

---

a) Riemann-Summe für $N \to \infty$ $(h \to 0)$:

$$R_h(f) = h \sum_{i=1}^{N} x_i^3 = h \sum_{i=1}^{N} \frac{i^3}{N^3} = \frac{1}{N^4} \sum_{i=1}^{N} i^3$$

$$= \frac{1}{N^4}\Big(\frac{1}{4} N^2 (N+1)^2\Big) = \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{1}{N}\Big)^2 \to \frac{1}{4} \quad \text{für } N \to \infty \quad \checkmark$$

b) Fehler in Abhängigkeit von $h = 1/N$:

$$R_h(f) - I(f) = \frac{1}{4}\Big(\cancel{1} + \frac{2}{N} + \frac{1}{N^2}\Big) - \cancel{\frac{1}{4}} = \frac{h}{2} + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{für } h \to 0$$

$\longrightarrow$

c) Trapezsumme $T_h(f)$ ist arithmetisches Mittel einer 'linken' und einer 'rechten' Riemann-Summe (letztere ist dieselbe wie unter a)):

$$T_h(f) \;=\; \frac{1}{2}\big(R_h^-(f) + R_h^+(f)\big) \;=\; \frac{h}{2}\Big(\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) + \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Big)$$

Für $f(x) = x^3$:

$$T_h(f) \;=\; \frac{h}{2}\Big(\sum_{i=0}^{N-1}\frac{i^3}{N^3} + \sum_{i=1}^{N}\frac{i^3}{N^3}\Big) \;=\; \frac{1}{2N^4}\Big(\frac{1}{4}(N-1)^2 N^2 + \frac{1}{4}N^2(N+1)^2\Big)$$

$$= \frac{1}{8N^4}\Big(N^2\,2\,(N^2+1)\Big) \;=\; \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{1}{N^2}\Big) \;\to\; \frac{1}{4} \quad \text{für} \quad N \to \infty$$

Fehler in Abhängigkeit von $h = 1/N$:

$$T_h(f) - I(f) \;=\; \frac{1}{4}\Big(\cancel{1} + \frac{1}{N^2}\Big) - \cancel{\frac{1}{4}} \;=\; \frac{h^2}{4} \quad \text{für} \quad h \to 0$$

... Fehler geht schneller gegen 0 als für $R_h(f)$.

$\square$